IL SENSO COMUNE

NELLE

SCIENZE ESATTE

ESPOSIZIONE PER TUTTI
DEI PRINCIPII DELLE SCIENZE MATEMATICHE

DI

GUGLIELMO KINGDON CLIFFORD

Informatio enim incipit a sensu. At universum negotium desinit in Opera.... Fallit Operatio maxime (præsertim post diligentem Naturarum Inquisitionem) propter male determinatas et mensuratas corporum vires et actiones. Vires autem et Actiones corporum circumscribuntur et mensurantur, aut per Spatia Loci, aut per momenta Temporis, aut per unionem Quanti, aut per prædominantiam Virtutis: quæ quatuor nisi fuerint probe et diligenter pensitata, erunt fortasse Scientiæ speculatione pulchræ, sed operæ inactivæ. Instantias vero quatuor itidem, quæ huc referuntur, uno nomine *Instantias Mathematicas* vocamus, et *Instantias Mensuræ*. — *Novum Organum*, Lib. II, Aph. XLIV.

N. 11

MILANO
FRATELLI DUMOLARD EDITORI
1886

INDICE

CAPITOLO I.

NUMERO.

*

CAPITOLO II.

SPAZIO.

CAPITOLO III.

QUANTITÀ.

CAPITOLO IV.

POSIZIONE.

CAPITOLO V.

MOVIMENTO.

PREFAZIONE

L'opera postuma di Clifford, che presentiamo al pubblico, vede ora la luce, sei anni dopo la morte dell'autore, avvenuta a Madera, nel marzo del 1879. Crediamo dover nostro di spiegare come ne sia stata così ritardata la pubblicazione (*).

L'opera, secondo il primo concetto di Clifford, doveva essere intitolata « *The first principles of the mathematical sciences explained to the non-mathematical*, » e contenere sei

(*) Un ritardo ancora più serio avrà probabilmente la pubblicazione della parte seconda ed ultima (*Cinetica*) degli *Elementi di Meccanica* di Clifford, il cui manoscritto è completo. Credo di non esagerare, reputando questo ritardo una vera disgrazia pel mondo matematico.

capitoli, sul *Numero*, lo *Spazio*, la *Quantità*, il *Movimento*, e la *Massa*. Di quest'opera, Clifford *dettò*, nel 1875, i capitoli sul Numero e sullo Spazio, la prima parte del capitolo sulla Quantità, e, alquanto dopo, tutto quello sul Movimento. Dei due primi capitoli vide anche le bozze, ma non le corresse mai definitivamente. Poco tempo prima della sua morte, manifestò il desiderio che il libro non fosse pubblicato, se non scrupolosamente riveduto, e che ne fosse mutato il titolo, in quello di « *The common sense of the Exact Sciences.* »

L'impresa della revisione e del compimento, morto Clifford, fu affidata al sig. R. C. Rowe, professore di matematiche pure all' « University College » di Londra. Il tempo e le cure, che egli prodigò a questo lavoro, attestano pienamente come il professor Rowe apprezzasse tutta la difficoltà, e, al tempo stesso, l'importanza dell'assunto impegno. E il complesso dell'opera sarebbe riuscito, senz'alcun dubbio, migliore, e più degno di Clifford che ora non

sia, se egli fosse vissuto abbastanza per condurne a termine l'edizione. Il prof. Rowe morì, sventuratamente, nell'ottobre del 1881: ed allora i sigg. Kegan Paul, Trench, e C. si rivolsero a me, perchè mi assumessi di curare la pubblicazione dell'opera, rimasta così incompleta. Non fu certo a cuor leggiero, ma bensì con un profondo senso di responsabilità, che io m'accinsi a rivedere per la stampa l'opera di due uomini, di cui ammiravo così altamente l'ingegno, e pei quali nutrivo il più profondo rispetto. L'esposizione precisa dello stato in cui si trovava il lavoro, quando mi fu affidato, permetterà forse al lettore di meglio giudicare le difficoltà del mio còmpito. I capitoli I e II, *Spazio* e *Numero*: metà del capitolo III, *Quantità* (allora erroneamente intitolato capitolo IV): e il capitolo V, *Movimento*, erano sotto i torchii. Oltre le bozze, io non potei avere che qualche dozzina di pagine del manoscritto corrispondente: il resto essendo stato reputato come oramai inutile, e perciò distrutto. Queste poche

pagine di manoscritto erano l'unico criterio di cui io disponessi, per desumere quanto il testo di quelle bozze presumibilmente conteneva di ciò che Clifford aveva dettato. Nel rivedere le bozze dei due primi capitoli, che erano passate sotto gli occhi dello stesso Clifford, procurai di cambiare il meno possibile, limitandomi ad aggiungere qualche nota a piedi di pagina, dove mi parve necessario. Sono però responsabile di tutte le figure intercalate nel testo, da pag. 78 in poi, fatta eccezione di tre, nel capitolo V.

Esaminato il lavoro affidatomi, e sentito anche il parere della signora Clifford, conchiusi che il capitolo sulla Quantità era stato spostato, e che il vero posto delle lacune era dalla metà del III capitolo al V, e alla fine del V. In qual modo queste lacune dovessero essere colmate, io non avevo in proposito alcuna precisa indicazione; soltanto, dopo che io avevo compiuto l'opera mia, si scoperse un antico progetto del libro, steso da Clifford. Era troppo tardi, per potersene giovare, ma servì a confermare il nuovo ordine dato ai capitoli.

Della seconda metà del capitolo III, (dal § 7 in poi) e di tutto il capitolo IV sono responsabile io solo. Io vado però debitore a Clifford di quanto v' ha in essi di pregevole, mentre quanto v'ha d'imperfetto e d'oscuro è colpa mia.

Arduo abbastanza fu il mio còmpito nel capitolo V. Scritto in un'epoca in cui Clifford si occupava intensamente dalla sua teoria dei « Graphs, » e gli riusciva impossibile di concentrare la mente sopra altri soggetti, alcune parti di esso sono chiare e concise, mentre altre erano quali l'autore non avrebbe mai permesso che fossero pubblicate. Rifarlo di pianta, mi pareva togliere al libro il diritto di chiamarsi opera di Clifford: e, al tempo stesso, non si poteva assolutamente pubblicarlo, senza notevoli cambiamenti. Perciò questo capitolo, assai più che i primi due, risente la mia revisione. Temo che del risultato molti non saranno soddisfatti; ma difficilmente qualcuno più di me ne riconosce i difetti. Mi valgano

di scusa le condizioni imposte al mio lavoro. Ancora una parola su questo capitolo: Una discussione sul movimento non si poteva lasciare senza un cenno sulla massa e sulla forza; io sentivo una lacuna nel testo; e perciò aggiunsi qualche pagina sulle leggi del movimento. Vidi poi che Clifford aveva realmente intenzione di terminare con un capitolo sulla massa. Ma, qual forma delle leggi del moto sarebbe stata approvata da lui? In nessun modo io potevo risolvere la difficoltà; perchè non era a mia cognizione che Clifford avesse mai scritto qualcosa su tale argomento. Per conseguenza esposi, non senza molta esitazione, il mio modo di vedere; il quale si traduce in sostanza in un voto perchè i termini di materia e di forza siano assolutamente banditi dalla terminologia scientifica, unitamente colle idee che vi si accompagnano — ossia, perchè tutta la dinamica si riduca a cinematica. Difficilmente io mi sarei peritato ad esporre questo mio modo di vedere, se non avessi più tardi scoperto che

(con qualche differenza di minor conto) ha l' appoggio dell' autorità del prof. Mach, di Praga (*). Se non che, scritte queste pagine, venni a cognizione di un discorso, tenuto da Clifford alla « Royal Institution » nel 1873, di cui si trova qualche cenno nella *Nature* del 10 giugno 1880. Ivi si legge questa affermazione, che « nessun matematico può attribuire un senso qualsiasi al modo in cui si discorre di materia, di forza, d'inerzia, nei testi usuali di meccanica (**). » Questo frammento basta per attestare che Clifford aveva, sulle questioni attinenti a forza e materia, idee chiare ed originali, come soleva formarsene, qualunque argomento prendesse a considerare: se non che, pur troppo, andarono perdute con lui.

(*) Vedi il suo recente litro *Die Mechanik in ihrer Entwickelung*. Lipsia 1883.

(**) Il sig. R. Tucker, che ha gentilmente rovistato le annotazioni di Clifford, per cercarvi quanto si riferisse a questo argomento, mi manda una lista di carta colle seguenti parole, di pugno di Clifford: « Force is not a fact at all, but an idea embodying what is approximately the fact. » (La forza non è assolutamente un fatto, ma un idea, che materializza ciò che sostanzialmente avviene).

Prima di terminare, sento il debito di ringraziare gli amici, che trovai sempre pronti a prestarmi il loro aiuto, a fornirmi i loro consigli. Senza il loro appoggio, non avrei potuto fare nemmeno il poco che feci. Mio unico desiderio fu di rendere di pubblica ragione, il più presto possibile, questa nuova opera d'un uomo, la cui memoria sarà sempre oggetto di riverenza, per quanti sentirono l'influenza corroborante della sua mente. Se quest'opera fosse stata pubblicata come un frammento, com'era desiderio di molti di noi, non sarebbe mai corsa per le mani di coloro ai quali Clifford la destinava. Completata da altri, dobbiamo limitarci a sperare che arrechi agli studii qualche poco di quel giovamento, che avrebbe pienamente arrecato, se il maestro fosse vissuto abbastanza per pubblicarla.

K. P.

LONDRA, COLLEGIO DELL'UNIVERSITÀ.
Febbrajo 26.

AL LETTORE

Gli splendidi risultati delle Scienze Esatte debbono suscitare il desiderio di farsi un'idea dei metodi, che permettono di conseguirli, e dei principii, che a quei metodi servono di fondamento, in ogni colta persona, che ne apprezzi l'importanza e la bellezza. Ma difficilmente raggiungerebbe l'intento chi, digiuno o non abbastanza fornito di cognizioni matematiche, ricorresse ai trattati speciali, destinati ai cultori di quelle Scienze. Il linguaggio tecnico, la convenzionale scrittura simbolica, e l'uso di quei concetti, che, raggruppando molteplici nozioni, sono uno strumento così efficace di ricerca e di ragionamento, per chi ne

possiede il maneggio, ma, talvolta suppongono la conoscenza di tutta una teoria, gli opporranno ben tosto tanta difficoltà, che, scoraggiato, desisterà dall'impresa. Eppure, per quanto astruso possa sembrare l'enunciato di una proposizione d'analisi, di geometria, o di meccanica, quel senso comune, che ci fa persuasi che 2 e 2 fanno 4, sarà sempre la sola condizione indispensabile, per afferrarne il significato e riconoscerne la verità. Soltanto, una minore preparazione vorrà che più remoto sia il punto di partenza della dimostrazione, più minuta la catena delle successive deduzioni, vorrà che siano posti nella debita evidenza gli anelli sui quali sorvola l'occhio esperto.

A tale concetto è informata quest'opera postuma dell'illustre Clifford, che, annunziata col titolo *The first principles of the Mathematical Sciences explained to the Non-Mathematical*, fu poi pubblicata, secondo il desiderio espresso dall'autore col titolo *The common sense of the exact sciences*. L'antico e il nuovo titolo,

che ho creduto opportuno di riunire sul frontispizio di questa traduzione, valgono a spiegare l'indole del libro. Il libro è destinato ad un pubblico non iniziato ai procedimenti della matematica, al quale l'autore, colla scorta del puro senso comune, si propone d'esporre i principii delle scienze esatte.

Questi, che l'autore chiama primi principii — uno sguardo agli argomenti trattati basterà per convincerne il lettore — sono quelli che stanno alla base, piuttosto che alle soglie, dell'edificio. L'esposizione delle proprietà dei numeri, e dei *passi* numerici, di cui è oggetto il primo capitolo, le discussioni sul rapporto di due quantità contenute nel terzo, e la teoria dei passi, esposta in questo e nel successivo capitolo, costituiscono più che un abbozzo di aritmetica generale; e il lettore, seguendo la progressiva generalizzazione del simbolo esprimente un'operazione, e il risultato di essa, prese le mosse dal concetto di numero intero, passerà per quello di numero frazionario, ir-

razionale, negativo, e immaginario, oltre quello di quaternione. Il capitolo II, dedicato allo *Spazio,* e l'articolo del capitolo IV sulla curvatura dello spazio, comprendono quanto è sufficiente per formarsi il concetto dello spazio conforme agli ultimi progressi della filosofia matematica: secondo il quale le basi della geometria si devono cercare nell' esperienza, per modo che « la geometria è una scienza fisica » (pag. 55). Feconda idea, per la prima volta sviluppata da Riemann e da Helmholtz, e di cui Beltrami ricondusse le conseguenze a quelle della geometria non euclidea di Lobatschewsky e di Gauss. Il concetto, destinato a trasformare le basi della dinamica che, invece di considerare il movimento come effetto della Forza, che agisce sulla materia, si devono cercare puramente nelle proprietà del moto le cause di quelle apparenze, che si manifestano come azioni reciproche dei corpi, si troverà accennato nel cap. V, dedicato al *Movimento:* dove, col problema della descrizione della tangente, e della

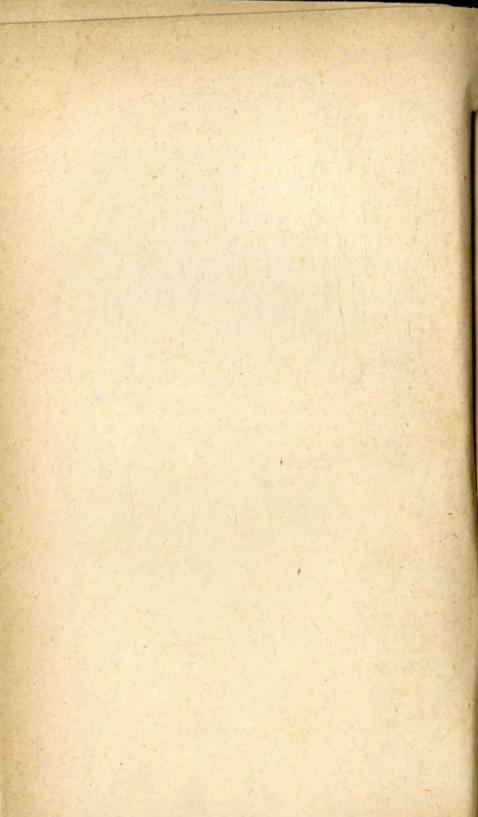
determinazione della velocità, si tocca anche dei principii del calcolo infinitesimale — ciò che l'autore chiama quota della variazione (*rate of change*) d'una funzione, non essendo altro che il suo coefficiente differenziale. All'esposizione dei principii vanno poi unite parecchie interessanti applicazioni di essi: come la deduzione della formola del binomio, nel capitolo sul *Numero:* la teoria dell' eguaglianza e della similitudine dei triangoli, e lo studio delle coniche, col metodo della projezione, nel capitolo sullo *Spazio:* la misura delle aree e dei volumi in quello sulla *Quantità*: la rappresentazione analitica delle linee in quello sulla *Posizione*.

A queste conseguenze l'autore arriva, stabilendo per fondamento di ciascun ramo alcuni postulati, che si devono accettare o come pure convenzioni, o come fatti sperimentali. Il postulato che il numero d'un gruppo di cose non cambia, cambiando l' ordine in cui si contano queste cose, o quello che la via per arrivare ad un posto è definita soltanto a condizione

che sia determinato il posto donde s'intende partire, non parranno per avventura un punto di partenza troppo remoto. A questo proposito, non sarà forse inutile ricordare il celebre pomo di Newton, che sta per attestare come l'esperienza abbia dimostrato che, dall'osservazione d'un fatto banale, possono scaturire le più importanti ed inaspettate conseguenze.

Mi sia permesso di chiudere con qualche parola su questa traduzione. Il compito del traduttore era lungi dall'esser facile, nel rendere nella nostra, dalla lingua inglese, eminentemente malleabile, un libro di questa indole, dove la forma dell'esposizione è almeno tanto essenziale quanto la sostanza. Il benigno lettore vorrà in parte scusare, con tale difficoltà, le imperfezioni del lavoro. Le poche note aggiunte a quelle dell'egregio curatore dell'edizione inglese, sono destinate a chiarire e a completare alcuni punti. Uno schiarimento lasceranno per avventura desiderare alcuni passaggi, che parranno troppo rapidi, alcuni con-

cetti, che forse non si troveranno abbastanza sviluppati; ma un commento, mentre non sarebbe stato conforme al carattere di questi Volumi, non sembrava nemmeno opportuno ad un'opera a cui l'autore non potè dare l'ultima mano, e di cui alcune parti dovette anche lasciare incomplete, rapito da una morte immatura, tanto funesta alla Scienza.

IL TRADUTTORE.

CAPITOLO I.

NUMERO

§ 1. *Il numero di un gruppo di cose è indipendente dall'ordine in cui queste cose si contano.*

La parola che sta in testa di questo capitolo si compone di sei lettere. Noi troviamo che sono sei, contandole: *n* uno, *u* due, *m* tre, *e* quattro, *r* cinque, *o* sei. Consideriamo ciò che abbiamo fatto, per eseguire questa operazione. A questo scopo, noi abbiamo preso quelle lettere, e vi abbiamo applicato sei vocaboli, che sono i primi sei di una serie, che sempre abbiamo alla mano, i nomi dei numeri. Applicando questi vocaboli, uno per ciascuna, alle lettere che compongono la parola *numero*, si trova che si finisce con *sei;* e, per questa ragione, attribuiamo a quella serie di lettere il nome di sei.

Contando, allo stesso modo, le lettere che compongono la parola « capitolo », si troverà che, in tal caso, si finisce col vocabolo *otto;* e perciò quella parola contiene otto lettere.

Ciò posto, facciamo un'osservazione. Supponiamo che le

lettere che compongono la parola *numero* siano segnate sopra altrettanti dadi di legno, presi da una scatola di caratteri; e, buttati questi dadi in un sacco, dopo averveli agitati, leviamoli, prendendo le lettere in un altro ordine qualsivoglia, e contiamole di nuovo; è certo che se ne troveranno sei, come prima. Supposto, per esempio, che escano nell'ordine alfabetico *o e m n r u*, applicandovi, uno per ciascuna, i nomi dei numeri precedentemente adoperati, si finirà, come prima, con sei. In generale, l'affermazione che un gruppo qualsivoglia di cose ne contiene sei implica la circostanza che, in qualunque ordine si prendano quelle cose, per contarle, si finirà sempre col vocabolo numerale sei. In altre parole, *il numero di una serie qualunque di cose resta sempre lo stesso, qualunque sia l'ordine in cui si contano le cose medesime.*

Questo fatto, che qui abbiamo osservato, prendendo il caso particolare del numero sei, e si verifica per qualunque numero, forma la pietra angolare di tutta quanta la scienza del numero. Passeremo ora a considerare alcuni teoremi sui numeri, che si deducono da esso.

§ 2. *La somma non dipende dall'ordine in cui si eseguisce l'addizione.*

Abbiansi due gruppi di cose, e siano le lettere che compongono la parola « numero », e quelle che compongono la parola « capitolo. » Contando le lettere appartenenti all'uno e all'altro gruppo, separatamente, le prime risultano sei, e le seconde otto. Mettendole poi tutte insieme, si forma un nuovo gruppo, che risulta composto di quattordici lettere.

Ora, questa operazione, consistente nel mettere tutte insieme le cose appartenenti all'uno e all'altro gruppo, si può immaginare eseguita in due diversi modi. Noi possiamo cominciare col prendere le sei cose, e formarne un mucchio, e aggiungervi poi le otto cose, una dopo l'altra. Eseguita in questo ordine, l'operazione del contare torna ad aggiungere a sei altri otto vocaboli numerali. Ma possiamo anche cominciare col fare un mucchio delle otto cose, per poi aggiungervi ad una ad una, le sei cose; e in questo caso, quell'operazione torna ad aggiungere altri sei vocaboli numerali a otto.

Per quanto abbiamo precedentemente osservato, cioè che, preso un gruppo qualsivoglia di cose, qualunque sia l'ordine in cui esse si contano, si arriva sempre allo stesso numero, il numero corrispondente al gruppo composto delle sei e delle otto cose deve risultare lo stesso, qualunque sia quello di quei due processi, mediante il quale ci si arriva. Questo numero si chiama la *somma* dei due numeri 6 e 8; e noi vediamo che ci si può egualmente arrivare, o col primo processo, che consiste nell'aggiungere 8 a 6, o col secondo, che consiste invece nell'aggiungere 6 a 8.

L'operazione mediante la quale si aggiunge 8 a 6 si rappresenta con un simbolo d'abbreviazione, che fu introdotto da Leonardo da Vinci. Una piccola croce di Malta (+) fa le veci di *aumentato di*, o di *più;* per modo che *sei aumentato di otto*, o *sei più otto*, si scrive brevemente così: $6 + 8$. Ora si è trovato che *sei più otto è lo stesso numero che otto più sei.* Per rappresentare tutto ciò in abbreviatura, occorre un simbolo il quale faccia le veci delle parole *è lo stesso numero che.* Esso è $=$, simbolo

introdotto da Roberto Recorde, matematico inglese, che fiorì nella prima metà del cinquecento. Ciò posto, il nostro risultato si può esprimere a questo modo:

$$6 + 8 = 8 + 6.$$

La proposizione così scritta, in forma simbolica, afferma che la somma di 6 e 8 è indipendente dall'ordine, nel quale questi due numeri si sommano insieme. Ma, pel nostro postulato fondamentale, questa conclusione, alla quale noi siamo venuti, considerando due numeri particolari, si deve estendere a due altri numeri qualunque. Difatti, per somma di due numeri s'intende un numero, a cui si arriva, prendendo un gruppo di cose contenente il primo numero di individui, e aggiungendo ad esse, ad una ad una, un altro gruppo di cose, composto del secondo numero di individui; oppure, prendendo un gruppo di cose composto del secondo numero di individui, e aggiungendo ad esse, ad una ad una, il gruppo di cose che ne contiene il primo numero. In virtù del nostro postulato fondamentale, queste due operazioni devono condurre allo stesso risultato. Quindi, non solo ci sarà lecito asserire che $6 + 8 = 8 + 6$, ma parimente che $5 + 13 = 13 + 5$, e così via, qualunque pajo di numeri vogliamo considerare.

Questa circostanza si può mettere in evidenza, ricorrendo al metodo, immaginato da Vieta, che consiste nel rappresentare ogni numero con una lettera dell'alfabeto. Scrivendo in ambedue i casi precedenti, e così in ogni altro caso analogo, a in luogo del primo numero, e b in luogo del secondo, la nostra proposizione riuscirà in ogni caso espressa dalla formola:

$$a + b = b + a.$$

Espressa a questo modo, la proposizione medesima non è più limitata a due numeri particolari, ma si applica a tutti quanti i numeri. Le lettere a e b, così adoperate, sono qualcosa di simile ai nomi dati alle cose, come sarebbe, per esempio, il nome *cavallo*. Quando si dice il cavallo ha quattro gambe, si fa un' asserzione, che si applica a tutti quanti i cavalli; e si afferma, in tal modo, che ogni determinato cavallo ha quattro gambe. Così pure, dicendo: « il cavallo ha tante gambe quante ne ha l'asino » non si alluderà ad un cavallo, e ad un asino determinato, ma bensì ad un asino e ad un cavallo qualunque. Nel modo stesso, quando si afferma che $a + b = b + a$, non s' intende parlare di due numeri determinati, ma di due numeri qualunque.

Questa legge si può estendere al caso di più di due numeri. Supponiamo di aggiungere alla somma $a + b$ un terzo numero c. Si otterrà così un gruppo composto, formato dalla riunione dei tre gruppi; e il numero delle cose che lo compongono si otterrà, sommando insieme i numeri delle cose che compongono separatamente i trè gruppi. Questo numero, in virtù della proposizione fondamentale, risulterà sempre lo stesso, in qualunque ordine i tre gruppi si sommino insieme, perchè si conterà, in ogni caso, la stessa collezione di cose. Sia che si prenda, in primo luogo, il gruppo di a cose, e vi si aggiungano le b cose ad una ad una, e al gruppo composto di $a + b$ cose, ottenuto in tal modo, si aggiungano le c cose, ad una ad una; o che si prenda il gruppo di c cose, e vi si aggiungano, ad una ad una, le b cose, e poi al gruppo composto di $c + b$ cose, ottenuto in tal modo, si aggiungano, ad una ad una, le a cose, la somma, in entrambi i casi, dovrà

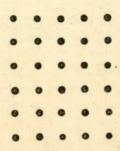
riuscire la stessa. Questo risultato si può esprimere colla formola simbolica $a + b + c = c + b + a$, e, per disteso, si può enunciare così: *La somma di tre numeri è indipendente dall'ordine nel quale essi si sommano insieme.*

Questa legge si estende ad un numero qualsivoglia di numeri. Quando si riuniscono insieme parecchi gruppi di cose, qualunque ne sia il numero, il numero delle cose che compongono il gruppo risultante si potrà sempre contare in varii modi. Si potrà cominciare col contare uno qualunque dei gruppi originarii, per poi passare ad uno qualunque degli altri, ed in seguito ad uno qualunque dei rimanenti, e via discorrendo. Ma, qualunque sia l'ordine nel quale questi gruppi si prendono, l'operazione definitiva torna a contare le cose che compongono il gruppo risultante; e per conseguenza il numero a cui si arriva deve sempre riuscire lo stesso.

§ 3. *Il prodotto non dipende dall'ordine nel quale si eseguisce la moltiplicazione.*

Ora, supponiamo di prendere dei gruppi di cose, che ne contengono tutti uno stesso numero, per esempio 5, e, fattone un gruppo solo, trattisi di contare il numero delle cose che lo compongono. A tal fine si potranno contare i sei gruppi di cinque cose, uno dopo l'altro: ciò che torna ad aggiungere cinque volte 5 a 5. Oppure, si potranno mescolare tutte quante le cose insieme, e contarle, senza preoccuparsi del loro precedente aggruppamento. Gioverà però immaginare i sei gruppi di cinque cose disposti in un modo particolare.

Supponiamo che le cose in discorso siano punti segnati

sopra un foglio di carta, che i singoli gruppi di cinque cose siano cinque punti disposti sopra una linea orizzontale, e che i sei gruppi siano posti l'uno sotto l'altro, come si vede nell'annessa figura.

La totalità dei punti che compongono i sei gruppi formano così una figura oblunga, contenente sei linee di cinque punti ciascuna. Sotto ciascuno dei cinque punti della linea superiore si trovano cinque altri punti, appartenenti ai gruppi rimanenti; e perciò, oltre le sei *linee* contenenti ciascuna cinque punti, vi sono sei *colonne*, ciascuna delle quali ne contiene sei. Apparisce da ciò che i punti considerati si possono egualmente distribuire in cinque gruppi di sei punti, e in sei gruppi di cinque. Il numero complessivo delle cose contenute in sei gruppi, ciascuno dei quali ne contiene cinque, si chiama sei volte cinque; e, per conseguenza, il precedente risultato c'insegna che sei volte cinque è lo stesso numero che cinque volte sei.

Come precedentemente, l'osservazione che abbiamo qui fatta, prendendo il caso di due numeri particolari, può essere estesa al caso di due numeri qualunque. Se si prende

un numero qualsiasi di gruppi di punti, i quali ne contengono tutti lo stesso numero, e si dispongono l'uno sotto l'altro, in linee orizzontali, i punti riusciranno distribuiti oltre che in linee, anche in colonne; ed è chiaro che il numero dei punti di ciascuna colonna sarà eguale al numero dei gruppi, mentre il numero delle colonne sarà eguale al numero dei punti di ciascun gruppo. Segue da ciò che il numero delle cose contenute in a gruppi, composti ciascuno di b cose, è eguale al numero delle cose contenute in b gruppi, composti ciascuno di a cose, qualunque siano i numeri a e b.

Il numero delle cose contenute in a gruppi, composti ciascuno di b cose, si chiama a volte b; e si vede così che a volte b è eguale a b volte a. Il numero a volte b si rappresenta scrivendo le due lettere a e b di seguito, cominciando da a; e perciò il nostro risultato si può esprimere nella forma simbolica $ab = ba$.

Immaginiamo ora di riunire insieme sette gruppi composti come i precedenti, disposti in forma di un sistema oblungo, simile a quello che abbiamo testè costruito. In questo caso non possiamo valerci della rappresentazione sopra un foglio di carta; ma immagineremo che ai punti siano sostituiti dei cubetti, che si possono disporre in una scatola oblunga. Sul fondo della scatola si troveranno sei linee composte ciascuna di cinque cubi, o, se vogliamo, cinque colonne composte di sei; e vi saranno sette strati, così composti, disposti l'uno sopra l'altro. Si vede così che al di sopra di ogni cubo, posto sul fondo della scatola, si troverà una pila di sei cubi, e che vi saranno complessivamente cinque volte sei di tali pile. Si può dunque dire egualmente che vi sono cinque volte sei gruppi di sette

cubi ciascuno, e sette gruppi di cinque volte sei cubi. Il numero complessivo dei cubi è indipendente dall'ordine nel quale essi sono contati; e, per conseguenza, concludiamo che sette volte cinque volte sei fa lo stesso come cinque volte sei volte sette.

Ma qui importa assai di notare che, quando si dice sette volte cinque volte sei, s'intende che si sono formati sette strati, ciascuno dei quali contiene cinque volte sei cose; mentre, quando si dice cinque volte sei volte sette, s'intende invece che si sono formate cinque volte sei colonne, ciascuna delle quali contiene sette cose. È chiaro che, nel primo caso, si moltiplicano, in primo luogo, i due ultimi numeri, e quindi il risultato si moltiplica pel primo (sette volte cinque volte sei = sette volte trenta) mentre, nel secondo, si moltiplicano i primi due numeri, e quindi si moltiplica il terzo pel risultato (cinque volte sei volte sette = trenta volte sette). Ora, è ben evidente che, riempita la scatola di cubi, essa potrà essere adagiata sopra ciascuna delle sue faccie, che fungerà allora da fondo, e che a seconda della faccia, vi saranno 5, 6 o 7 strati di cubi, e, nei rispettivi casi, altrettanti cubi in ogni pila. Per conseguenza, fa perfettamente lo stesso, o prendere sette strati contenenti ciascuno cinque volte sei cubi, o sei strati contenenti ciascuno sette volte cinque cubi, o cinque strati contenenti ciascuno sei volte sette cubi.

Rappresenteremo cinque volte sei col simbolo 5×6, e quindi cinque volte sei volte sette con $5 \times 6 \times 7$.

Se non che questa espressione non indica, se si devono moltiplicare fra loro 6 e 7, e poi prendere 5 volte il risultato, o se si deve cominciare col moltiplicare fra loro 5 e 6, e prendere poi 7 il numero di volte espresso dal

risultato. Le due operazioni si possono distinguere per mezzo di parentesi; così $5 \times (6 \times 7)$ significa che si deve, in primo luogo, moltiplicare fra loro 6 e 7, e quindi prendere il risultato 5 volte, mentre $(5 \times 6) \times 7$ significa che si deve moltiplicare fra loro 5 e 6, e poi prendere 7 il numero di volte espresso dal risultato.

Possiamo ora enunciare le due proposizioni seguenti, che esprimono due proprietà della moltiplicazione.

Primo, le parentesi distinguono l'operazione mediante la quale si ottiene il risultato, ma non influiscono sul risultato medesimo: ossia $5 \times (6 \times 7) = (5 \times 6) \times 7$.

Secondo, il prodotto di questi tre numeri non dipende dall'ordine nel quale essi si moltiplicano fra loro.

La prima di queste proposizioni si chiama la legge *associativa* della moltiplicazione, e la seconda, la legge *commutativa.*

Ora, le osservazioni fatte a proposito del risultato che si ottiene, moltiplicando fra loro i numeri 5, 6 e 7, si applicano, senza modificazione, a tre numeri qualunque.

Si potrà sempre immaginare d'avere una scatola, di cui l'altezza, la lunghezza e la larghezza siano tali, che essa possa contenere tre gruppi qualunque di cubi, il cui numero complessivo è chiaro che sarà indipendente dalla posizione della scatola. Ora, comunque la scatola si adagi, essa conterrà un certo numero di strati, ogni strato conterrà un certo numero di linee, e ogni linea, un certo numero di cubi. Il numero complessivo dei cubi contenuti nella scatola sarà il prodotto di questi tre numeri: e si otterrà, prendendo due qualunque di essi, moltiplicandoli fra loro, e poi, moltiplicando il risultato pel terzo numero.

Esprimiamo questa proprietà di tre numeri qualunque in forma simbolica.

In primo luogo, si ha $a(bc) = (ab)c$: ossia, torna lo stesso moltiplicare il prodotto del secondo e del terzo numero pel primo, e il terzo numero pel prodotto del primo e del secondo.

In secondo luogo, si ha $abc = acb = bca$, ecc.: per modo che, in conclusione, il prodotto di tre numeri qualunque è indipendente dall'ordine e dal modo di aggruppamento che si segue nell'eseguire le moltiplicazioni.

Così, nel caso di due numeri, e in quello di tre, hanno luogo proposizioni analoghe; e ciò ne induce a indagare, se simili proposizioni valgono nel caso di quattro numeri, di cinque, e via discorrendo.

Alle due proposizioni in discorso si è giunti, immaginando di disporre le cose considerate, nel primo caso, sopra un foglio di carta, nel secondo caso, in una scatola, in modo d'avere tanti strati simili ciascuno al gruppo disposto sul foglio di carta, e, in ciascun caso, supponendo di calcolarne il numero complessivo. Si potrebbe, per avventura, proceder oltre, e disporre, per esempio, un certo numero di scatole, per modo da rappresentare in modo analogo il prodotto di quattro numeri? È chiaro che non si può.

Perciò, procuriamo di trovare qualche altra specie di ragionamento, che valga a convincerci che ciò che abbiamo riconosciuto nel caso di tre numeri — cioè che il risultato che si ottiene, moltiplicandoli fra loro, è indipendente dall'ordine in cui si moltiplicano — sta anche per quattro, e più numeri.

Dimostreremo, in primo luogo, che due dei numeri con-

siderati che si susseguono, nel processo della moltiplicazione, si possono scambiare di posto, senza alterare il prodotto.

Consideriamo, per esempio, il prodotto di quattro numeri, *abcd*. Procureremo di mostrare che esso e il prodotto *acbd* sono tuttuno.

Il simbolo *abcd* significa che si devono prendere *c* gruppi di *d* cose, poi *b* gruppi simili al gruppo composto così formato, e finalmente *a* gruppi di *bcd* cose.

Ora, per ciò che fu precedentemente dimostrato, *b* gruppi di *cd* cose danno lo stesso numero come *c* gruppi di *bd*. E, per conseguenza, *a* gruppi di *bcd* cose fanno lo stesso come *a* gruppi di *cbd*; vale a dire $abcd = acbd$.

È evidente che, se s'immagina che a *d* segua un numero qualunque di lettere, non cessa di valere il precedente ragionamento.

Supponiamo, per esempio, che abbiasi un prodotto di sei numeri, *abcdef*. In questo caso, si deve moltiplicare *f* per *e*, il risultato per *d*, poi *def* per *c*, e così via.

Ora, questo caso differisce dal precedente soltanto perchè il prodotto *def* piglia il posto del numero *d*; e *b* gruppi di *c* volte *def* cose fanno lo stesso numero come *c* gruppi di *b* volte *def* cose, perchè questo numero non è altro che il prodotto dei tre numeri *b*, *c* e *def*. Il risultato riesce dunque lo stesso, qualunque sia l'ordine in cui si scrivono *b* e *c*, e non cambierà in virtù delle moltiplicazioni susseguenti, vale a dire, se si moltiplica per tanti numeri quanti se ne vogliono, dopo di *a*. Di qui si conclude che, qualunque sia il numero dei numeri che si devono moltiplicare fra loro, due che si susseguono si possono scambiare di posto, senza alterare il prodotto.

In secondo luogo, dimostriamo che si possono scambiare di posto anche due qualunque che non si susseguono: per modo che, per esempio, *abcdef* fa lo stesso come *aecdbf*, che se ne deduce scambiando di posto *b* e *e*. A tal fine, basta osservare che *aecdbf* si deduce da *abcdef*, facendo camminare *e* da destra a sinistra, scambiandolo successivamente di posto con *d*, con *c* e con *b*, in seguito a che si ottiene *aebcdf;* e quindi, facendo camminare *b* da sinistra a destra, scambiandolo successivamente di posto con *c* e *d*.

Finalmente, dico che, per mezzo di simili scambii, si può alterare l'ordine come si vuole. Supponiamo, per esempio, che si tratti di cambiare *abcdef* in *dcfbea*. Qui *d* ha da occupare il primo posto: e perciò lo scambierò con *a*, producendo *dbcaef*. Poi *c* deve occupare il secondo: ciò che ottengo, scambiandolo con *b*, ed ho così *dcbaef*. Ora porrò *f* al terzo posto, scambiandolo con *b*, e ottenendo in tal modo *dcfaeb:* finalmente, porrò *b* al quarto, scambiandolo con *a*, e così produrrò *dcfbea*. Questa è la forma cercata; e per mezzo di cinque al più di tali scambii, l'ordine di sei lettere si può cambiare a piacere. Così si vede che lo scambio di due lettere qualunque si produce con una serie di scambii di due lettere consecutive: ciò che, per quanto fu precedentemente dimostrato, non altera il prodotto. Si conclude che il prodotto di sei numeri presi in un certo ordine è eguale al prodotto degli stessi numeri presi in un altro ordine qualsiasi; e si vede facilmente come la conclusione medesima regga per tanti numeri quanti se ne vuole.

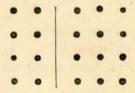
Ma, non ci siamo dati, per avventura, troppa pena, per dimostrare ciò che si poteva indovinare a tutta prima?

Certo, si poteva indovinare da bel principio che un prodotto è indipendente dall'ordine, e dall'aggruppamento de' suoi fattori; e, occupandoci a sviluppare le conseguenze di questa congettura, la nostra fatica avrebbe avuto il compenso della scoperta d'interessanti proprietà. Molti bei teoremi furono indovinati, e largamente adoperati, prima che dimostrati definitivamente; anzi, d'alcuni non fu data ancora una dimostrazione perfetta. Ma, tosto o tardi, la ricerca si deve intraprendere; ed essa ha sempre per risultato di rischiarare le idee intorno alla natura del teorema, oltre che dà il diritto di asserire che il teorema è esatto. Nè ciò è tutto; perchè, nella maggior parte dei casi, lo stesso modo di dimostrazione, o di ricerca, può essere applicato ad altre questioni; ciò che ha per risultato di estendere sempre più il campo delle nostre cognizioni. Questo accade colla dimostrazione in discorso; ma, finchè si tratta puramente di numeri, non possiamo farne un'applicazione che facendo un passo indietro. I ragionamenti che precedono risguardano la moltiplicazione; vediamo, se si possono applicare all'addizione.

Ciò che si è dimostrato si riduce a questo. Un certo risultato si ricava da certe cose, prendendole in un ordine determinato; orbene, *se si possono scambiare di posto due cose consecutive, senza alterare il risultato, allora l'ordine si può cambiare in un modo qualunque, senza alterare il risultato medesimo.* Facciamo un'applicazione alla numerazione. Supposto d'avere un gruppo di cose qualsiansi, per contarle, possiamo immaginare di prenderle, in un ordine determinato, e di applicarvi, ad uno ad uno, le dita; il risultato dipende dal dito che verrà per ultimo, e il nome numerale che vi corrisponde si chiama il numero

delle cose in tal modo contate. Quanto precede c'insegna che il risultato così ottenuto sarà indipendente dall'ordine in cui si conta, purchè resti invariato, quando si scambiano fra loro due cose consecutive; vale a dire, purchè le due dita consecutive, che v'immaginiamo applicate, si possano scambiare in modo che ciascuno venga a corrispondere all'oggetto al quale prima corrispondeva l'altro, senza che occorra perciò di lasciar libero qualche dito adoperato prima, o di adoperarne qualcuno di più. Cos per mezzo di questo postulato, si può *dimostrare* che il numero di ogni gruppo di cose è indipendente dall'ordine nel quale le cose stesse si contano, la qual proposizione, come si è visto, è il fondamento della scienza dei numeri.

§ 4. *La legge distributiva.*

Vi è un'altra legge relativa alla moltiplicazione, la quale è forse ancor più importante delle due precedenti. Eccone un caso particolare. Il numero 5 è la somma di 2 e di 3, e 4 volte 5 è la somma di 4 volte 2 e di 4 volte 3. Ciò apparisce all'occhio dalla seguente disposizione di punti:

Ivi si hanno quattro linee di cinque punti ciascuna, e ciascuna linea è divisa in due parti, le quali contengono ri-

spettivamente due e tre punti. È chiaro che il numero complessivo dei punti si può calcolare indifferentemente, in due modi; e cioè, o come quattro linee di cinque punti, o come quattro linee di due punti, più quattro linee di tre. Pel nostro principio generale, il risultato è indipendente dall'ordine in cui si conta, e perciò

$$4 \times 5 = (4 \times 2) + (4 \times 3);$$

e, mettendo in evidenza che $5 = 2 + 3$,

$$4\,(2 + 3) = (4 \times 2) + (4 \times 3).$$

È chiaro che il ragionamento si può applicare a tre numeri qualunque, nonchè ai numeri particolari 4, 2, 3. Possiamo costruire una figura rettangolare con a linee orizzontali di $b + c$ punti, le quali, per mezzo di una retta verticale, si potranno dividere in a linee di b punti, e a linee di c punti. Il numero complessivo dei punti, computato in un modo, risulta $a\,(b + c)$, nell'altro, $ab + ac$; e, per conseguenza, si ha, in generale,

$$a\,(b + c) = ab + ac.$$

Questa è la *prima forma* della legge distributiva.

Ora, il risultato della moltiplicazione è indipendente dall'ordine dei fattori: e, per conseguenza,

$$a\,(b + c) = (b + c)\,a$$
$$ab = ba$$
$$ac = ca,$$

per modo che la nostra equazione si può presentare così:

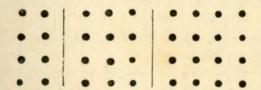
$$(b + c)\ a = ba + ca;$$

e questa è la *seconda forma* della legge distributiva.

Adoperando i numeri dell'esempio precedente, si dirà che, poichè 5 è la somma di 2 e di 3, 5 volte 4 è la somma di 2 volte 4 e di 3 volte 4.

Osserviamo che si può arrivare a questa formola direttamente e assai semplicemente, così: si sa che 2 cose e 3 cose fanno 5 cose, qualunque siano le cose in discorso; orbene, ciascuna di esse sia un gruppo di 4 cose; 2 quattro e 3 quattro faranno 5 quattro: ossia

$$(2 \times 4) + (3 \times 4) = 5 \times 4.$$

La legge può essere generalizzata. È chiaro che la figura rettangolare considerata si può immaginare divisa, per mezzo di rette verticali, in più di due parti, e che il precedente ragionamento reggerà ancora. Per esempio, questa figura mette in evidenza che, siccome 2, 3 e 4

fanno 9, 4 volte 2, 4 volte 3 e 4 volte 4 fanno 4 volte 9; ovvero, in generale,

$$a\,(b + c + d) = ab + ac + ad,$$
$$(b + c + d)\,a = ba + ca + da;$$

e lo stesso ragionamento si applica alla somma di tanti numeri quanti se ne vogliono, e alla relativa moltiplicazione.

§ 5. *Sulle potenze.*

Quando un numero si moltiplica per sè stesso si dice che si eleva al quadrato, o, semplicemente, che si *quadra.* Ciò perchè, se, come si è fatto precedentemente, si forma una figura rettangolare, per mezzo di linee di punti, e il numero delle linee è eguale a quello dei punti contenuti in ciascuna di esse, la figura diventa quadrata.

Quando il quadrato di un numero si moltiplica pel numero stesso, si dice che il numero si eleva al cubo, o che si *cuba;* perchè, se una scatola si può completamente riempire di cubi formanti linee, colonne e pile, che ne contengono un numero eguale, la larghezza, la lunghezza e l'altezza della scatola saranno fra loro eguali, e la sua forma sarà quella di un cubo.

Moltiplicando fra loro quattro numeri eguali, come, per esempio, quattro 3, ciò che fa 81, o quattro 2, ciò che fa 16, si ottiene ciò che si chiama la quarta potenza di uno qualunque di essi.

Nello stesso modo, se si moltiplicano fra loro tanti numeri quanti se ne vogliono, tutti fra loro eguali, si ottiene una potenza di uno di essi, che si chiama la quinta, la sesta, la settima, e così via, a seconda della quantità dei numeri che si moltiplicano fra loro.

Ecco una tavola delle potenze di 2 e di 3.

Esponente . . .	1	2	3	4	5	6	7	8
Potenze di 2 . . .	2	4	8	16	32	64	128	256
Potenze di 3 . . .	3	9	27	81	243	729	2187	6561

Il numero di fattori eguali che si moltiplicano fra loro si chiama l'*esponente*, e si scrive in piccolo, e un po' in alto, a destra del numero di cui in tal modo si rappresenta la potenza. Per esprimere in forma abbreviata che, se si moltiplicano fra loro sette 3, si ottiene 2187, basta scrivere

$$3^7 = 2187.$$

Giova osservare che ogni numero è la propria *prima potenza;* così $2^1 = 2$, $3^1 = 3$, e, in generale, $a^1 = a$.

§ 6. *Quadrato di* $a + 1$.

Per spiegare le proprietà dei quadrati, possiamo prendere le mosse dal noto rompicapo aritmetico, che consiste nel trovare un numero pensato da un altro, per mezzo del risultato di una serie di calcoli eseguiti sopra di esso.

Si pensi un numero . . . . . per esempio, 3
Si quadri 9
Si aggiunga 1 al numero pensato 4
Si quadri il numero ottenuto 16
Si prenda la differenza dei due quadrati . . . 7.

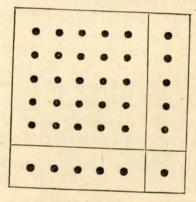
Quest'ultimo numero risulterà sempre dispari, e il numero pensato sarà la metà del primo numero pari minore

di esso. Così, il risultato finale essendo 7, il numero pensato dev'essere la metà di 6, ossia 3.

Dimostriamo questa regola. A tal fine, immaginiamo il quadrato di 5 rappresentato in forma di venticinque punti disposti in un quadrato; in qual modo possiamo dedurne il quadrato di 6? Apparisce dalla figura annessa che perciò basta aggiungere cinque punti a destra, poi cinque a basso, e finalmente un punto nell'angolo.

Vale a dire, per dedurre il quadrato di 6 dal quadrato di 5, si deve aggiungervi 1 oltre 2 volte 5; ossia

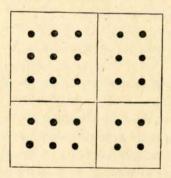
$$36 = 25 + 10 + 1.$$

Reciprocamente, il numero 5 risulta la metà della differenza tra il suo quadrato e quello di 6, diminuito di 1.

La forma di questo ragionamento mostra che esso regge per qualsiasi numero. Dato un quadrato di punti, se ne dedurrà un quadrato contenente, in ogni lato, un punto di più, aggiungendovi una colonna di punti a destra, poi una linea in basso, e finalmente un punto nell'angolo:

vale a dire, aggiungendovi due volte il numero dei punti contenuti in ciascun lato, più uno. Per conseguenza, data la differenza dei due quadrati, basta levarne 1, e prendere la metà, per avere il numero dei punti contenuti in ogni lato del quadrato primitivo.

Vogliamo ora scrivere questo risultato in forma abbreviata. Sia a il numero dato; allora $a + 1$ sarà il numero immediatamente superiore; e ciò che occorre di esprimere è che il quadrato di $a + 1$, cioè $(a + 1)^2$, si deduce dal quadrato di a, che è a^2, aggiungendovi il doppio di a aumentato di uno, cioè $2a + 1$. Perciò l'espressione abbreviata sarà la seguente:

$$(a + 1)^2 = a^2 + 2a + 1.$$

Questo teorema è un caso particolare di uno più generale, il quale permette di trovare il quadrato della somma di due numeri qualunque in termini dei quadrati dei due numeri, e del loro prodotto. Considereremo, in primo luogo, il caso del quadrato di 5, somma di 2 e 3.

Nella presente figura il quadrato formato da venticinque

punti è diviso in due quadrati e due rettangoli. I quadrati sono rispettivamente formati da un numero di punti eguale al quadrato di 2, e al quadrato di 3, e ciascun rettangolo, da un numero di punti eguale al prodotto di 2 e 3. Apparisce da ciò che, per dedurre il quadrato i cui lati contengono 3 + 2 punti, dal quadrato i cui lati ne contengono 3, basta aggiungervi due colonne a destra, due linee in basso, e finalmente il quadrato i cui lati contengono due punti, nell'angolo. Infatti, $25 = 9 + 2 \times 6 + 4$.

§ 7. *Sulle potenze di* $a + b$.

Per generalizzare questo risultato, supponiamo di avere un quadrato, i cui lati contengano a punti, e si tratti di dedurne un quadrato, i cui lati ne contengano $a + b$. A tal fine si dovranno aggiungere b colonne a destra, b linee a basso, e finalmente il quadrato i cui lati contengono b punti, nell'angolo. Poichè ogni colonna e ogni linea contengono a punti, si conclude che ciò che si deve aggiungere ammonta a due volte ab aumentato di b^2; ossia, in forma abbreviata:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Il teorema precedentemente ottenuto si può ricavare da questo, facendo $b = 1$.

Questa dimostrazione è completa, e non lascia nulla a desiderare; vogliamo però darne anche un'altra. Ciò, perchè vogliamo generalizzare la nostra proposizione ancora di più, e trovare un'espressione di ogni potenza di $(a + b)$, nonchè del quadrato, formata colle potenze di a, e di b,

e coi prodotti delle potenze dei numeri stessi, al quale scopo, il metodo precedentemente seguito non può servire. Si potrebbe, è vero, trovare il cubo i cui lati contengono $a + b$ pezzi, e rappresenta il cubo del numero $a + b$, aggiungendo il numero conveniente di pezzi al cubo i cui lati ne contengono a; ma non ci si raccapezzerebbe cosi facilmente. Inoltre, per le potenze più elevate, non si potrebbe valersi di una rappresentazione consimile. La dimostrazione, che passiamo a dare, si fonda sulla legge distributiva della moltiplicazione.

Difatti, in virtù di questa legge, abbiamo:

$$\begin{aligned}(a+b)^2 = (a+b)(a+b) &= a(a+b) + b(a+b)\\ &= aa + ab + ba + bb\\ &= a^2 + 2ab + b^2.\end{aligned}$$

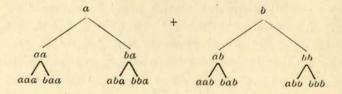
Ecco, per disteso, ciò che esprime questa scrittura abbreviata: Il quadrato della somma dei due numeri significa la somma moltiplicata per sè stessa. Ora questo prodotto è il primo numero moltiplicato per la somma, più il secondo numero moltiplicato per la somma stessa. Ma il primo numero moltiplicato per la somma fa lo stesso come il primo numero moltiplicato per sè stesso, aumentato del primo numero moltiplicato pel secondo. E il secondo numero moltiplicato per la somma fa lo stesso come il secondo numero moltiplicato pel primo, più il secondo moltiplicato per sè stesso. Mettendo tutto insieme, si trova che il quadrato della somma è eguale alla somma dei quadrati dei due numeri, più il doppio del loro prodotto.

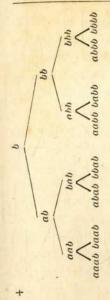
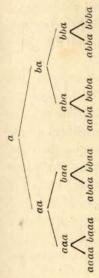
Il confronto è istruttivo, e mette in evidenza due cose. La prima, come l'espressione abbreviata, per la sua bre-

vità, presenti il vantaggio di una chiarezza assai maggiore. La seconda, che l'espressione medesima non fa che esprimere brevemente una verità di senso comune. E, senza dubbio, è cattiva algebra quella che, voltata in buon italiano, non soddisfa il senso comune.

Ma ora presentiamo il processo di formazione del quadrato in una forma geometrica, che ci permetta di generalizzarlo. Partiamo da due numeri, a e b. Per quanto precede, dobbiamo moltiplicare ciascuno di essi per a e per b, e poi aggiungere i risultati. Poniamo, in ogni caso,

il risultato della moltiplicazione per a a sinistra, e quello della moltiplicazione per b a destra, sotto il numero moltiplicato. Otteniamo così una figura, che rappresenta il processo di formazione del quadrato di $a + b$ nel modo voluto.

Se ora si tratta di moltiplicare il precedente risultato, di nuovo, per $a + b$, in modo da ottenere $(a + b)^3$, si deve moltiplicare ogni parte della linea inferiore della figura per a, e per b, e poi aggiungere i risultati, come indica la figura seguente:

Si vede così che il risultato si compone di otto termini.

+

Il primo e l'ultimo sono rispettivamente a^3 e b^3. Dei rimanenti sei, tre sono *baa*, *aba*, *aab*, eguali ciascuno a $a^2 b$, e tre *bba*, *bab*, *abb*, eguali ciascuno a ab^2. Si conclude:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3\,a^2 b + 3\,ab^2 + b^3.$$

Per esempio, $11^3 = 1331$. Qui $a = 10$, $b = 1$, e $(10+1)^3 = 10^3 + 3 \times 10^2 + 3 \times 10 + 1$, poichè è chiaro che ogni potenza di 1 è ancora 1.

Consideriamo anche il caso successivo, riserbandoci di fare in seguito delle osservazioni generali, che ci dispenseranno di fare un gradino alla volta.

In questo caso vi sono sedici termini, dei quali il primo e l'ultimo sono rispettivamente a^4 e b^4. Dei rimanenti, alcuni contengono tre a e un b, altri due a e due b, altri infine un a e tre b. Della prima specie ve ne sono quattro, perchè b può occupare il primo, il secondo, il terzo o il quarto posto; analogamente, ve ne sono quattro della terza specie, poichè a può occupare ciascuno dei quattro posti ora nominati; ne avanzano sei da ascrivere alla seconda specie. Così si trova che

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.$$

Questo processo di deduzione si po-

trebbe ripetere a piacere, e si troverebbero di mano in mano alberi sempre più ramificati. Se non che si capisce facilmente che il calcolo e la classificazione dei termini dell'ultima linea diventerebbe presto un operazione assai penosa. Procuriamo di dispensarci da questa pena col fare alcune riflessioni sul processo di formazione.

Se, partendo da *a*, si discende lungo l'albero rappresentato dall'ultima figura, fino a *abaa*, si riconoscerà che questo termine si va formando, mentre si discende, per una successiva applicazione di lettere dalla parte di sinistra. L'*a* da cui si comincia è l'ultima lettera di *abaa*; discendendo, si volge a destra, e vi si applica un altro *a;* poi, a sinistra, e a questo *a* si applica un *b;* finalmente, di nuovo si volge a destra, e al *b* si applica l'*a* che occupa il primo posto. Di qui si possono trarre due conclusioni.

In primo luogo, *i termini risultanti hanno tutti una forma diversa;* perchè ogni differenza nel cammino secondo il quale si scende lungo l'albero introduce una differenza nella disposizione o nella qualità delle lettere del risultato.

In secondo luogo, *si producono tutte le disposizioni possibili di quattro lettere, che sono o* a *o* b; perchè, data una disposizione particolare, per esempio, *abab*, basta leggerla da sinistra a destra, intendendo che *a* significhi « volta a sinistra! » e *b*, « volta a destra! », ed essa indicherà il cammino, che si deve seguire nel discendere lungo l'albero, per trovare in fondo la disposizione medesima.

Queste due osservazioni si possono riunire in una sola, dicendo che *tutte le disposizioni possibili si producono una volta, e una volta sola.*

Ora il nostro problema era di contare il numero dei

termini che contengono un certo numero di b. Dalla precedente osservazione segue che ciò torna lo stesso come contare il numero di tutte le disposizioni possibili che contengono quel numero di b.

Consideriamo, per esempio, i termini che contengono un solo b. Se i singoli termini contengono tre lettere, il numero delle disposizioni possibili è 3, perchè b può occupare il primo, il secondo, o il terzo posto: *baa, aba, aab*. Se ne contengono quattro, il numero stesso è 4, perchè b può occupare il primo, il secondo, il terzo o il quarto posto: *baaa, abaa, aaba, aaab.* In generale, è chiaro che qualunque sia il numero delle lettere contenute nei diversi termini, vi è un egual numero di posti, che possono essere occupati da b, e, per conseguenza, di disposizioni contenenti un solo b. In linguaggio abbreviato, se n è il numero delle lettere, i termini che contengono un solo b, sono n. E, per conseguenza, sono parimente n i termini che contengono un solo a, e del resto tutti b.

Abbiamo così i termini che figurano al principio e alla fine dell' n^{ma} potenza di $a+b$, e possiamo scrivere:

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \text{altri termini} + nab^{n-1} + b^n.$$

Questa scrittura abbreviata significa che, se si moltiplicano fra loro n $(a+b)$, il risultato che si ottiene è la somma di varii termini, quattro dei quali stanno scritti. Il primo è il prodotto di n a moltiplicati fra loro, ossia a^n; il successivo, n volte il prodotto di b per $(n$-1) a cioè na^{n-1}; il penultimo, n volte il prodotto di a per $(n$-1) b, cioè nab^{n-1}; finalmente, l'ultimo è il prodotto di n b, moltiplicati fra loro, che si rappresenta con b^n.

Resta da completare questa proposizione, col trovare quali sono gli « altri termini » che contengono più di un a e più di un b.

§ 8. *Sul numero delle disposizioni di un gruppo di lettere.*

Questo problema appartiene ad un ramo assai importante dell'aritmetica applicata, che si chiama teoria delle permutazioni e delle combinazioni, ed insegna a trovare quante disposizioni si possono fare con una data serie di cose, e quante si possono considerare come distinte. Queste due questioni dipendono l'una dall'altra, e in primo luogo conviene contare le disposizioni.

A due lettere corrispondono evidentemente due disposizioni, ab e ba. A tre lettere ne corrispondono sei:

$$abc,\ acb,\ bca,\ bac,\ cab,\ cba,$$

e cioè due che cominciano con a, due che cominciano con b, e due che cominciano con c; in tutto tre volte due. Potremo scrivere senza molta fatica anche tutte le disposizioni di quattro lettere; ma possiamo calcolarne il numero senza darci questa pena; infatti, se poniamo d davanti a ciascuna delle disposizioni di tre lettere, otteniamo sei disposizioni di quattro lettere, che cominciano con d, e che sono evidentemente tutte quelle delle disposizioni in discorso, che possono cominciare con d. Similmente, ve ne saranno sei che cominciano con a, sei che cominciano con b, e sei che cominciano con c; in tutto, quattro volte sei, ossia *ventiquattro.*

Riuniamo insieme questi risultati:

Con due lettere il numero delle disposizioni è due = 2
» tre » tre volte due . . . . . . = 6
» quattro » quattro volte tre volte due = 24

Di qui s' intravvede la regola seguente: *Per trovare il numero delle disposizioni che si possono formare con un dato gruppo di lettere, si moltiplicano fra loro i numeri due, tre quattro, ecc., fino al numero delle lettere che compongono il gruppo.*

Questa regola sta per due, tre e quattro lettere; è valida, per avventura, anche per un numero qualunque di lettere?

Considereremo il caso successivo ai precedenti, quello che le lettere siano cinque; e lo tratteremo con un metodo che si potrà applicare a qualunque caso. Ognuna delle cinque lettere può essere presa per la prima; e perciò si può disporre del primo posto in cinque modi. Per ciascuno di questi modi, si può disporre in quattro modi del secondo posto; vale a dire ciascuna delle quattro lettere rimanenti può essere posta per la seconda. Si hanno così cinque volte quattro modi di disporre dei primi due posti. Per ciascuno di essi, vi sono tre modi di disporre del terzo posto, perchè ciascuna delle tre lettere rimanenti può essere posta per la terza. Ciò fa cinque volte quattro volte tre modi di disporre dei primi tre posti. Finalmente, per ciascuno di questi modi, si può disporre in due modi degli ultimi due posti; e, per conseguenza, si conclude che vi sono cinque volte quattro volte tre volte due, o 120, modi di disporre le cinque lettere in discorso.

Ora questo metodo di contare le disposizioni si applica evidentemente a tante lettere quante se ne vogliono; concludiamo quindi che la regola precedentemente enunciata sta per un numero qualsivoglia.

In linguaggio abbreviato l'enuncieremo così: Il numero delle disposizioni di n lettere è $1 \times 2 \times 3 \ldots \times n$; o, sostituendo un punto al segno $\times$, $1 . 2 . 3 \ldots n$. L'1, col quale si comincia, non è veramente necessario; ma si pone, per includere il caso estremo di una lettera sola, nel quale vi è evidentemente una sola disposizione.

Nelle scienze esatte il prodotto $1 . 2 . 3 \ldots n$, o, come si suol dire, il prodotto dei primi n numeri naturali, si presenta assai spesso; e perciò è parso opportuno di avere un segno particolare, per rappresentarlo, nel modo stesso che i segretarii di un'assemblea sogliono servirsi di un segno particolare, per indicare le frasi che capitano più spesso. Se non che i matematici non si sono ancora accordati sulla scelta. In Inghilterra si adopera generalmente il simbolo $\underline{n|}$; ma è incomodo per la stampa. Alcuni scrittori del continente fanno uso del punto d'ammirazione, e scrivono $n!$ E fu osservato che esso ha l'aria di indicare qualcosa di meraviglioso. Per conto mio, dò la preferenza ad un simbolo, che ha per sè l'autorità del sommo Gauss, cioè la lettera greca Π (Pí), che si può risguardare, se si vuole, come un'abbreviazione di *prodotto*, e scrivo Πn. In tal modo si ha:

$$\Pi 1 = 1,\ \Pi 2 = 2,\ \Pi 3 = 6,\ \Pi 4 = 24,\ \Pi 5 = 120,\ \Pi 6 = 720,$$

e, in generale,

$$\Pi (n + 1) = (n + 1)\, \Pi n,$$

poichè, infatti, il prodotto dei primi $n+1$ numeri è eguale al prodotto dei primi n numeri moltiplicato per $n+1$.

§ 9. *Sopra un teorema che concerne una potenza qualunque di* (a + b).

Applichiamo la regola precedente al problema di contare i termini di $(a+b)^n$; e, per fissare le idee, come abbiamo sempre fatto, cominciamo con un caso particolare, il caso di $n=5$. Si sa, per quanto precede, che in questo caso vi è un termine i cui fattori sono tutti a, e uno i cui fattori sono tutti b; cinque termini, che sono il prodotto di quattro a per un b, e cinque che sono il prodotto di di un a per quattro b. Non resta che da calcolare il numero dei termini che si possono formare, moltiplicando tre a per due b, il quale è chiaramente eguale a quello dei termini che si possono formare, moltiplicando due a per tre b. Per conseguenza, il problema è questo: *Quante disposizioni differenti si possono formare con tre* a *e due* b*?*

I tre a sono tutti fra loro eguali, e così i due b. Per risolvere il problema, gioverà concepirli come distinti, e perciò sostituiamoci per un momento delle lettere majuscole e minuscole. Quante disposizioni differenti si possono fare con tre lettere majuscole A, B, C, e due minuscole *d*, *e*?

In questa questione le lettere majuscole si devono considerare come equivalenti l'una all'altra, e così pure le lettere minuscole, per modo che le disposizioni ABC*de* e CAB*ed* conteranno per una sola.

Queste sono due disposizioni nelle quali le lettere majuscole e le minuscole si succedono nello stesso modo (tre majuscole di seguito e poi due minuscole). Poichè le

3 lettere majuscole si possono disporre in $\Pi 3 = 6$ modi, e le 2 lettere minuscole in $\Pi 2 = 2$ modi, si vede che con quell'ordine di successione si potranno formare in tutto $6 \times 2 = 12$ disposizioni equivalenti, e, in generale, che una disposizione nella quale le lettere majuscole e le minuscole si succedono in un ordine determinato apparterrà ad un gruppo di $6 \times 2 = 12$ disposizioni equivalenti. Ora è chiaro che, se si prendono tutte le disposizioni che si possono formare con un diverso ordine di successione delle lettere majuscole e minuscole, e in ciascuna di esse si permutano le majuscole fra loro, e le minuscole egualmente fra loro, si otterranno tutte le disposizioni che si possono formare colle cinque lettere A, B, C, *d*, *e*, il numero delle quali è $\Pi 5$ o 120. Ma siccome ogni disposizione dove le lettere majuscole e le minuscole si succedono in un ordine determinato figurerà dodici volte, e 12 sta in 120 esattamente *dieci* volte, si vede che il numero cercato è dieci. Ossia, il numero delle disposizioni di tre *a* e due *b* è $\Pi 5$ diviso per $\Pi 3$ e $\Pi 2$.

Infatti le disposizioni in discorso sono le seguenti:

bbaaa, babaa, baaba, baaab
abbaa, ababa, abaab
aabba, aabab
aaabb.

Nella prima linea si comincia con un *b*, e al secondo *b* si possono dare *quattro* posizioni diverse; nella linea successiva si assegna ad un *b* il secondo posto, e all'altro *b* si possono dare *tre* posizioni diverse; e così via. È chiaro che, nel caso particolare in discorso, si sarebbe potuto

ottenere il numero delle disposizioni col metodo assai più semplice del calcolo diretto, del quale ci siamo valsi per verificare il risultato; ma il metodo precedente ha il vantaggio di fornire una formola generale, applicabile a tutti i casi possibili.

Riflettiamo alquanto sul risultato ottenuto. Si è trovato:

$$(a + b)^5 = a^5 + 5\,a^4\,b + 10\,a^3\,b^2 + 10\,a^2\,b^3 + 5\,a\,b^4 + b^5$$

Osserviamo che $1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 32$, per modo che si è reso conto di tutti i 32 termini che figurerebbero nell'ultima linea dell'albero corrispondente a questo caso.

Ora possiamo passare alla soluzione del nostro problema generale. Sia p il numero degli a, e q il numero dei b, che, in un certo termine, si moltiplicano fra loro; si tratta di trovare quante disposizioni si possono fare con questi p a, e questi q b. Sostituiamovi per un momento p lettere majuscole, e q lettere minuscole, formanti, in tutto, $p + q$ lettere. Allora ogni disposizione formata con esse, nella quale le lettere majuscole e le minuscole si succedono in un ordine determinato appartiene ad un gruppo di disposizioni equivalenti, che si otterranno tutte, permutando le lettere majuscole fra loro, e le minuscole egualmente fra loro. Ora, permutando le lettere majuscole, si possono formare Πp disposizioni, e permutando le minuscole, Πq. Segue da ciò che ogni disposizione dove le lettere majuscole e le minuscole si succedono in un determinato ordine appartiene ad un gruppo di $\Pi p \times \Pi q$ disposizioni equivalenti. D'altra parte il numero totale delle disposizioni che si possono formare colle $p + q$ lettere

è $\Pi(p+q)$. Per ciò che si è ora conchiuso, ogni disposizione dove le lettere majuscole e le minuscole si succedono in un ordine determinato figura $\Pi p \times \Pi q$ volte. Si conchiude che il numero cercato si otterrà dividendo $\Pi(p+q)$ per $\Pi p \times \Pi q$.

Esso può rappresentarsi in forma di frazione, così:

$$\frac{\Pi(p+q)}{\Pi p . \Pi q};$$

quantunque non sarà mai una frazione, perchè il denominatore dividerà sempre esattamente il numeratore. E realmente sarebbe assurdo il parlare della metà, o del quarto di un modo di disporre una serie di lettere.

Così siamo arrivati al risultato che *il numero dei modi in cui si possono disporre* p a *e* q b *è*

$$\frac{\Pi(p+q)}{\Pi p . \Pi q}.$$

In altre parole, questo è il numero dei modi in cui si possono dividere $p+q$ posti in p di una specie, e q dell'altra: come pure quello in cui si possono estrarre p cose da $p+q$.

Applicando questo risultato all'espressione di $(a+b)^n$, si vede che tutti i termini che contengono così a come b saranno della forma

$$\frac{\Pi n}{\Pi p . \Pi q} a^p b^q,$$

dove $p+q=n$, e che si otterranno tutti, dando a q suc-

cessivamente i valori 1, 2, 3, ecc., e a p i valori che si ottengono, sottraendo questi numeri da n. Per esempio, si troverà

$$(a + b)^6 = a^6 + 6a^5b + \frac{\Pi 6}{\Pi 4 . \Pi 2}a^4b^2 + \frac{\Pi 6}{\Pi 3 . \Pi 3}a^3b^3$$

$$+ \frac{\Pi 6}{\Pi 2 . \Pi 4}a^2b^4 + 6ab^5 + b^6.$$

Il calcolo dei numeri che figurano in questa espressione si può abbreviare notevolmente. Così, si deve dividere 1. 2. 3. 4. 5. 6 per 1. 2. 3. 4; evidentemente, il risultato è 5. 6. Questo numero dev'essere poi diviso per 2; e così si finisce per ottenere 5. 3 o 15. Similmente, per calcolare

$$\frac{\Pi 6}{\Pi 3 . \Pi 3},$$

basta dividere 4. 5. 6 per 1. 2. 3 o 6, e si trova subito 4. 5 o 20.

Per scrivere la nostra espressione di $(a + b)^n$, ci occorre un altro segno d'abbreviazione. Abbiamo veduto che questa espressione si compone di tanti termini, che hanno tutti la stessa forma

$$\frac{\Pi n}{\Pi p . \Pi q}a^pb^q,$$

ma si distinguono l'uno dall'altro, perchè p e q vi ricevono distinte coppie di valori la cui somma è n. Ora, come adoperiamo la lettera greca Π per indicare un prodotto,

adopereremo la lettera Σ (Sigma) per indicare una somma; e rappresenteremo la somma dei termini in discorso così:

$$\Sigma \frac{\Pi n}{\Pi p . \Pi q} a^p b^q, \qquad [p + q = n].$$

I termini estremi a^n e b^n si possono includere a buon diritto nel tipo generale. Infatti, per $p = n$, e $q = 0$, dalla forma generale si ha

$$\frac{\Pi n}{\Pi n . \Pi 0} a^n b^0,$$

la qual espressione si riduce ad a^n, se $\Pi 0 = 1$, $b^0 = 1$. Veramente « il prodotto dei primi zero numeri » non ha senso; ma, se si ammette che la relazione

$$\Pi (n + 1) = (n + 1) \Pi n,$$

la quale sta qualunque sia il numero rappresentato da n, sussista anche quando n rappresenta zero, e quindi $n + 1 = 1$, con questa ipotesi, se ne ricava

$$\Pi 1 = \Pi 0;$$

e abbiamo veduto a suo luogo la ragione per cui a $\Pi 1$ attribuiamo il significato di 1. Inoltre, se diciamo che b^q significa il risultato che si ottiene, moltiplicando 1 per b q volte, b^0 significherà il risultato che si ottiene, moltiplicando 1 per b nessuna volta, vale a dire, non moltiplicandolo del tutto; e questo risultato è 1.

Fatte queste convenzioni, concludiamo

$$(a+b)^n = \Sigma \frac{\Pi n}{\Pi p \,.\, \Pi q} a^p b^q \qquad [p+q=n],$$

dove s'intende che p deve ricevere tutti i valori da n, discendendo fino a 0, e q tutti i valori, da 0, salendo fino a n.

Questo risultato si chiama la *Formola del Binomio di Newton*, e fu dato, per la prima volta, da Newton. *Binomio* si suol chiamare un'espressione composta di *due* termini, come $a+b$; e *Formola del Binomio* è un'espressione abbreviata che sta in vece di *formola relativa ad una potenza qualunque di un binomio.*

§ 10. *Sulle operazioni che si presentano come prive di senso.*

Le operazioni fin ora considerate permettono, dati due numeri, di determinarne per mezzo di essi un terzo. Due numeri si possono sommare insieme, e si ottiene così la loro somma; si possono moltiplicare fra loro, e si ottiene il loro prodotto.

Ai quesiti: Qual'è la somma di due numeri dati? e Qual'è il loro prodotto? si può sempre rispondere. Ma diversamente, non si può sempre trovare la soluzione dei quesiti, di cui ora passiamo a discorrere.

Supponiamo, in primo luogo, che si domandi: Qual numero, aggiunto a 3, produce 7? La risposta è evidentemente 4. L'operazione, mediante la quale si trova questo numero 4, si chiama sottrarre 3 da 7; e, rappresentandola, come l'addizione, per mezzo di un segno, si scrive:

$$7-3=4.$$

Ma supponga il lettore che io domandi: Qual numero, aggiunto a 7, produce 3? In questo caso, la domanda, per quanto, spiegata per disteso a parole, sembri fatta in buon italiano, non ammette risposta possibile; che, se, valendosi dei simboli, si scrive $3 - 7$, si posa, sotto altra forma, il medesimo quesito, di cui non esiste la soluzione.

Vi è dunque, fra sommare e sottrarre una differenza essenziale; poichè, come abbiamo precedentemente notato, la somma di due numeri esiste in ogni caso.

Un'espressione come $3 + 4$ si potrà sempre adoperare colla sicurezza che possieda un preciso significato; difatti, vi sarà senz'altro un numero di cui essa è una rappresentazione simbolica. Ma se, presa un'espressione come $3 - 7$, si ragionasse sopra di essa, come se avesse significato, sarebbe un parlare assurdo, perchè, per formarla, si accoppiano dei simboli, ai quali corrispondono realtà che non vanno insieme. Al quesito: che risultato si ottiene, levando un dato numero da un altro? non si può rispondere, se non nel caso che il secondo numero sia più grande del primo.

Analogamente, quando si tratta di moltiplicare fra loro due numeri, sappiamo che il prodotto esiste sempre; per la qual cosa un simbolo come 4×5 rappresenta sempre un numero, e si può usarne senza scrupolo. Ora, si domandi: Qual'è il numero, che, moltiplicato per 4, produce 20? La risposta è evidentemente 5. L'operazione mediante la quale si deduce questo numero da 20 e da 4 si chiama dividere 20 per 4; e, rappresentandola, come le precedenti operazioni, con un simbolo, si scrive $20 \div 4 = 5$.

Ma supponiamo che si tratti di divedere per 4 il numero 21. Nessun numero, nel senso che per ora an-

nettiamo a questa parola — cioè nessun numero intero — può dare 21, moltiplicandolo per 4; e perciò se, presa l'espressione 21 ÷ 4, si ragionasse sopra di essa, come se avesse significato, sarebbe un parlare assurdo, come ragionando sull'espressione 3 — 7, poichè quell'espressione, al pari di questa, si forma, accoppiando dei simboli, ai quali corrispondono concetti contradditorii.

Questo fatto, nella matematica, si presenta ripetutamente; poichè ogni nuova operazione rappresenta un quesito; e questo potrà essere risolto o no, a seconda delle circostanze.

Posto il caso che il quesito non si possa risolvere, prendendo i simboli, che ne rappresentano la soluzione, quando esiste, e ragionando sopra di essi, come se avessero un significato, si farà un parlare assurdo. Ma un assurdo di questa specie non sarà roba da buttar via. Una lunga e molteplice esperienza insegna che non v'ha nulla di più proficuo. Se non che si deve riconoscere che è un assurdo, e valersi di ciò per farne una cosa conforme al buon senso.

Si ottiene questo risultato, attribuendo ai vocaboli e ai simboli un nuovo significato, tale che, per mezzo di esso, il quesito proposto riceva una soluzione.

Vediamo ora, in particolare, quale significato si possa attribuire ai nostri simboli, allo scopo di fare una cosa conforme al buon senso dell'espressione attualmente assurda 3 — 7.

§ 11. *Passi.*

L'operazione consistente nell'aggiungere 3 a 5 si indica con 5 + 3, e dà per risultato 8. Noi possiamo considerare

questa operazione come un modo speciale di passare da 5 a 8, facendo un passo rappresentato da + 3; e, conformemente a ciò, leggeremo il simbolo + 3, *passo avanti tre.*

Analogamente, coll'espressione 5 — 3 = 2, si indica simbolicamente che, sottraendo 3 da 5, si ottiene per risultato 2; e questa operazione si può parimente considerare come un modo di passare da 5 a 2, facendo un passo rappresentato da — 3. Se il precedente era un passo avanti, questo è un passo indietro; e perciò leggeremo — 3, *passo indietro tre.*

Un passo si supporrà sempre preso a partire da un numero abbastanza grande, perchè il risultato abbia senso. Questa restrizione non vincola i *passi avanti,* perchè, partendo da qualsiasi numero, si potrà andare avanti finchè si vuole; ma *indietro* un passo non si può prendere che a partire da un numero più grande del passo medesimo.

Definito così il concetto di passo, osserviamo che, quando, partendo da un numero qualunque, si prendono due passi, l'uno di seguito all'altro, non importa quale dei due si prende pel primo. Ciò si riconoscerà immediatamente, nel caso che i due passi abbiano la stessa direzione. + 3 + 4, indicando di fare il passo avanti 3, e quindi il passo avanti 4, significa che si deve fare un passo avanti eguale alla somma dei numeri corrispondenti ai due passi; nel modo stesso, — 3 — 4 significa che si deve fare un passo indietro eguale alla somma di 3 e 4, ossia a 7.

Ora supponiamo che i due passi abbiano direzioni opposte. + 3 — 7, per esempio, significa che si deve fare il passo avanti 3, poi il passo indietro 7; e il risultato è lo stesso come facendo il passo indietro 4. Ora è chiaro che lo stesso risultato si otterrebbe, facendo prima il passo

indietro 7, e poi il passo avanti 4. Esso sarà, in ogni caso, un passo nella direzione del più grande dei due passi considerati, e di grandezza eguale alla loro differenza.

Vediamo così che due passi, presi l'uno di seguito all'altro, sono equivalenti ad un solo passo, il quale è indipendente dall'ordine in cui essi si prendono.

Si deduce da ciò, con un ragionamento affatto simile a quello di cui ci siamo valsi nel caso della moltiplicazione, che un numero qualsiasi di passi, presi l'uno dopo l'altro, ha una risultante indipendente dall'ordine di successione; la qual legge si può considerare come una generalizzazione della legge analoga relativa all'addizione dei numeri, a suo luogo dimostrata.

Così, noi abbiamo trovato un nuovo significato, che possiamo attribuire ai nostri simboli, in virtù del quale l'espressione $3 - 7$ non riuscirà più contraria al senso comune. Ivi si deve intendere che il simbolo 3 rappresenti $+ 3$, ossia passo avanti 3: il simbolo $- 7$, passo indietro 7; e l'intera espressione non significherà più che si tratta di levare 7 da 3, ma bensì che si deve aggiungere 3, e poi sottrarre 7 da un numero qualsiasi, abbastanza grande, perchè si possa attribuire un senso al risultato. Conformemente a ciò, il risultato dell'operazione indicata dalla nostra espressione è $- 4$, ossia, per valerci della scrittura abbreviata, $+ 3 - 7 = - 4$.

Un passo si potrà moltiplicare, cioè prendere un determinato numero di volte; così, per esempio, sarà $2 (- 3) = - 6$; ossia, ogniqualvolta si possono prendere di seguito due passi indietro eguali a 2, essi saranno equivalenti ad un passo indietro eguale a 6.

È chiaro che, per moltiplicare un passo, si moltiplica il

numero che lo rappresenta, e se ne conserva la specie; per modo, moltiplicando un passo avanti, o un passo indietro, si ottiene, a seconda del caso, un nuovo passo avanti, ed un nuovo passo indietro.

La moltiplicazione d'un passo si può considerare come un' operazione che trasforma il passo dato in un altro. Così, nell'esempio precedente, il moltiplicatore 2 trasforma il passo indietro 3 nel passo indietro 6. Se non che questa operazione, per quanto abbiamo testè osservato, trasformerà un passo in un altro della medesima specie, e si presenta spontanea la domanda: Non si potrà immaginare un'operazione, per mezzo della quale un passo si trasformi in un altro, di specie opposta? Il nome, che sembra più naturale, per designare sì fatta operazione, è senza dubbio quello di rivolgimento di un passo.

Rivoltare un passo avanti, o un passo indietro, vorrà dire trasformarli rispettivamente in un passo indietro, e in passo avanti.

Combinando l' operazione così definità colla moltiplicazione, un passo di grandezza e di specie qualunque si potrà trasformare in un altro parimente di qualunque grandezza, e di qualunque specie; per esempio, si potrà trasformare -3 in $+6$, cioè il passo indietro 3 nel passo avanti 6; e, indicando il rivolgimento colle lettere r, si avrà l'espressione $r2(-3) = +6$.

Così, un passo si potrà sempre trasformare in un altro, mediante un' operazione, la quale può essere di due diverse specie: cioè, può mantenere inalterata la direzione del passo, e può rivoltarlo. Se, per amore di simmetria, quando la direzione del passo si mantiene inalterata, conveniamo d' indicarlo colla lettera m, la pura moltiplica-

zione si rappresenterà con un'equazione di questa forma: $m2(-3) = -6$.

È chiaro che, preso un passo, si potrà eseguire sopra di esso una successione di operazioni di questa specie, in numero qualsivoglia. Prendiamo il passo $+4$; triplicandolo, e rivoltandolo, si ottiene -12; duplicando alla sua volta questo nuovo passo, e mantenendone la direzione, si ottiene -24; e ciò si può rappresentare coll'equazione $m2(r3)(+4) = -24$. Ora -24 è anche eguale a $r6(+4)$; per modo che le due operazioni, che abbiamo supposto di eseguire sul passo considerato, la prima consistente nel triplicarlo e rivoltarlo, la seconda nel duplicarlo, e mantenenrne la direzione, sono equivalenti ad una sola operazione, consistente nel sestuplicarlo, e rivoltarlo. È chiaro che le due prime operazioni, successivamente eseguite, risulteranno sempre equivalenti alla terza, qualunque sia il passo che si considera, e perciò possiamo scrivere l'equazione $m2(r3) = -6$.

Supposto invece di prendere un passo qualsiasi, e di triplicarlo e rivoltarlo, poi duplicarlo e rivoltarlo di nuovo, il risultato sarà lo stesso come se si moltiplicasse per sei, e se ne mantenesse inalterata la direzione.

Quindi: $r2(r3) = m6$.

Confrontiamo queste due ultime formole colle due precedenti, cioè con $m2(-3) = -6$, e $r2(-3) = +6$; noi vediamo che le due paja sono perfettamente simili, salvo che, in quello che abbiamo ultimamente ottenuto, sta scritto m ad r, dove nell'altro si trova rispettivamente $+$ e $-$.

Ciò non toglie che il loro significato sia completamente diverso. Così, prendendo la seconda formola di ciascun pajo, l'una esprime le proposizione: raddoppiando e rivol-

tando il passo indietro 3, si ottiene il passo avanti 6; mentre l'altra significa: triplicando e rivoltando, poi duplicando e rivoltando, poi duplicando e rivoltando di nuovo un passo qualunque, si ottiene lo stesso risultato, come *sestuplicandolo*, e mantenendone invariata la direzione.

Questa analogia, come fra poco vedremo, sussiste in generale; cioè, ad ogni proposizione, colla quale si enuncia l'effetto prodotto da una successione qualsivoglia di operazioni eseguite sopra un passo, ne corrisponderà sempre un'altra, dove al passo si trova sostituita un'operazione; o, per dirla altrimenti, ogni operazione, che trasforma un passo in un altro, trasforma parimente in un'altra un'operazione, la quale consiste di una moltiplicazione pel numero che rappresenta il passo, con mantenimento di direzione, oppure rivolgimento, secondo che il passo in discorso è un passo avanti, oppure un passo indietro.

§ 12. *Estensione del significato dei simboli.*

Ciò che ora passiamo a fare parrà a tutta prima che debba produrre la maggior confusione, mentre invece l'analisi ne ricava immensi vantaggi.

Una volta riconosciuto che due distinte cose, che abbiamo sempre debitamente indicato con simboli diversi, conducono a risultati della stessa forma, salvo che per rappresentare uno di essi si adopera una specie di simboli, ed un'altra, per rappresentar l'altro, converremo di modificare il significato dei simboli, in modo che, invece di due specie, non ne figuri più che una sola. D'or in avanti i simboli $+$ e $-$ indicheranno ciò che finora fu sempre indicato con m ed r, cioè mantenere la direzione d'un passo, e

rivoltarlo; in pari tempo conserveranno il loro significato primitivo; e il contesto deciderà, in ogni caso particolare, con quale dei due significati possibili si devono prendere. Così, all'equazione $(-2)(-3) = +6$ si potranno attribuire due significati diversi. I simboli -3 e $+6$ potranno, in primo luogo, rappresentare due passi; e, in questo caso, l'equazione esprimerà: raddoppiando e rivoltando il passo indietro -3, si ottiene il passo avanti 6. Ma gli stessi simboli -3 e $+6$ potranno anche indicare un'operazione; e, in questo secondo caso, l'equazione esprimerà invece: se si triplica e si rivolta, poi si duplica, e si rivolta di nuovo un passo qualsivoglia, si ottiene lo stesso risultato come sestuplicandolo, e mantenendone inalterata la direzione.

Vediamo per qual ragione è lecito esserire che questi due significati potranno sempre coesistere.

Perciò, consideriamo, in primo luogo, il secondo, e procuriamo di formare una regola, per trovare il risultato di un numero qualunque di operazioni successive.

In primo luogo, è chiaro che il numero, che nel risultato farà da moltiplicatore, sarà il prodotto di tutti i numeri, che fanno da moltiplicatore, nelle successive operazioni.

In secondo luogo, due consecutivi rivolgimenti si elideranno; per modo che, ogniqualvolta ve ne sia un numero pari, l'operazione risultante manterrà la direzione del passo.

Cio posto, ecco la regola cercata: Per trovare la risultante di un numero qualsivoglia di operazioni, si moltiplicheranno fra loro i numeri che compariscono nelle singole operazioni, e al prodotto si premetterà il segno $+$ o il segno $-$, secondo che vi sarà un numero pari oppure un numero dispari di *meno*, cioè di rivolgimenti.

Ora, consideriamo il primo significato, e immaginiamo di assoggettare un passo ad una successione qualunque di operazioni.

È chiaro che il numero, che rappresenta il passo risultante, sarà il prodotto dei numeri, che compariscono nelle singole operazioni, e di quello che rappresenta il passo originario.

Inoltre, i due passi saranno della stessa specie, oppure di specie opposta, secondo che la serie delle operazioni comprenderà un numero pari, oppure un numero dispari di rivolgimenti.

Ciò posto, supponiamo che il passo dato sia un passo indietro. Il passo risultante, se i rivolgimenti sono in numero pari, sarà parimente un passo indietro; ma, in questo caso, il numero dei segni (—), calcolato indipendentemente dal significato attribuito a questi segni, sarà dispari (perchè si aggiungerà il segno —, che indica la specie del passo dato, al numero pari di segni —, che indicano i successivi rivolgimenti); e perciò questo risultato è conforme al precedente.

Assoggettando invece un passo negativo ad un numero dispari di rivolgimenti, il passo risultante sarà positivo. Ma, in questo caso, il numero dei segni (—), calcolato indipendentemente dal loro significato, è pari; e perciò il risultato è ancora conforme a quello di prima.

Si conclude da ciò che, in ogni caso, adoperando gli stessi simboli per indicare che un passo è « avanti », o « indietro », e rispettivamente che, nella trasformazione d'un passo, si deve « mantenerne la direzione », o « rivoltarlo », ci sarà lecito di attribuire ad ogni espressione due diversi significati, senza pericolo che uno di esso sia falso.

Notiamo che, nello svolgere questo argomento, cammin facendo, abbiamo dimostrato che, assoggettando un passo ad una serie qualsivoglia d'operazioni della specie considerata, si ottiene un risultato indipendente dal loro ordine di successione. Esso difatti, per quanto abbiamo veduto, sarà sempre un passo, di cui il prodotto dei numeri che compariscono nel passo dato, e nelle singole operazioni, rappresenta la grandezza, e il numero dei rivolgimenti definisce la specie.

§ 13. *Addizione e moltiplicazione delle operazioni.*

Passeremo ora a trovare una legge, che collega l'addizione e la moltiplicazione dei passi.

Presi, per esempio, i passi $+ 3$ e $- 7$, se si moltiplicano separatamente per 4, e poi si forma il risultante dei due passi così ottenuti, si ottiene lo stesso risultato, come formando il risultante dei due passi primitivi $+ 3$ e $- 7$, e moltiplicandolo per 4; difatti $+ 12 - 28 = - 16$, e $- 16 = 4 (- 4)$. Una relazione di questa specie si verifica in generale, e si può facilmente ricondurre alla legge fondamentale che un gruppo di cose, comunque si conti, corrisponde sempre allo stesso numero: se non che, nel presente caso, il calcolo si deve fare, parte andando indietro, e parte andando avanti, come prima.

Ma, oltre i passi, attribuendo all'addizione il debito significato, si possono sommare insieme le operazioni. Supposto che $+ 3$ e $- 7$ si considerino come operazioni, parrà naturale di ammettere senz'altro che la loro somma debba essere di necessità l'operazione $- 4$. Se non che non dobbiamo ammettere nulla senza dimostrazione, e

meno ancora valerci di un'espressione, senza fissarne precisamente il significato.

Ora, dicendo che la somma delle due operazioni + 3 e — 7 è l'operazione — 4, s'intende di dire che, triplicando un passo qualsivoglia, mantenendone invariata la direzione, e componendo il risultato così ottenuto, con quello che si ottiene, moltiplicando il passo medesimo per 7, e rivoltandolo, si otterrà lo stesso risultato, come moltiplicandolo per 4, e rivoltandolo. Ciò è vero senz'alcun dubbio; e che sia vero ce ne possiamo persuadere, eseguendo le operazioni, per così dire, in forma di passi. Prendiamo, per esempio, il passo + 5. Per triplicarlo, mantenendone inalterata la direzione, si prenderanno tre passi di cinque numeri nella direzione (progressiva), in cui va preso il passo medesimo. Similmente, per moltiplicarlo per 7, e rivoltarlo, si prenderanno sette passi di cinque numeri, nella direzione opposta, o regressiva. Ciò fatto, non ci resterà più che da prendere tre passi avanti, e poi sette passi indietro, composti di cinque numeri ciascuno; e si riconosce, a prima vista, che si otterrà lo stesso risultato come prendendo quattro passi indietro, composti ciascuno di cinque numeri.

Così, la somma di due operazioni è perfettamente definita; e riesce implicitamente dimostrato, pel modo in cui siamo arrivati a questa definizione, che la somma stessa è indipendente dall'ordine delle operazioni.

Perciò, possiamo oramai scrivere le formole

$$a + b = b + a$$
$$a (b + c) = ab + ac$$
$$(a + b) c = ac + bc$$
$$ab = ba,$$

e considerare le lettere che vi figurano come simboli di operazioni eseguite sopra dei passi.

Sussistendo queste relazioni fra le operazioni, come fra fra i numeri, i ragionamenti di cui ci siamo valsi, a suo luogo, per trovare le potenze della somma di due numeri, si potranno adoperare, senz'altro, per trovare le potenze della somma di due operazioni. Potremmo rifarli, attribuendo a tutti i simboli i loro nuovi significati; ma vi rinuncieremo, per risparmio di tempo e di spazio.

Tuttavia, per dare un esempio, varrà la pena di esaminare il caso del quadrato della somma di due operazioni.

Prendiamo, per esempio, $+5$ e -3.

Per la formola del binomio, $(+5-3)^2$ è eguale a $(+5)^2+(-3)^2+2(+5)(-3)$. Ora, ciò significa che, eseguendo due volte di seguito, sopra un passo qualsivoglia, la somma delle due operazioni $+5$ e -3, cioè, moltiplicando il passo medesimo per 5, mantenendone inalterata la direzione, poi triplicandolo e rivoltandolo, e dei due passi così ottenuti formando il risultante, finalmente eseguendo sopra questo nuovo passo la stessa operazione, si ottiene un passo, che si può ottenere egualmente componendo i tre seguenti:

Primo, il passo originario, moltiplicato due volte di seguito per 5.

Secondo, il passo originario, moltiplicato due volte per 3, e due volte rivoltato, per modo che la direzione finisce per essere la primitiva.

Terzo, due volte il risultato che si ottiene, triplicando il passo dato, e rivoltandolo, quindi moltiplicandolo per 5, e mantenendone inalterata la direzione.

§ 14. *Divisione delle operazioni.*

Abbiamo veduto che cosa significa moltiplicare due operazioni; vediamo ora qual genere di problema si posa colla *divisione.*

A tal fine prendiamo, ad esempio, la proposizione simbolica $-3\ (+5) = -15$; e attribuiamoci, in primo luogo, il significato che, triplicando e rivoltando il passo avanti 5, si trova il passo indietro 15. In base a questa proposizione si possono porre due distinti quesiti. Si può domandare, in primo luogo: Qual' è l'operazione, che, eseguita sul passo avanti 5, produce il passo indietro -15? alla qual domanda si deve evidentemente rispondere: Triplicare e rivoltare. In secondo luogo, si può domandare: Qual è il passo, che triplicato e rivoltato, produce il passo indietro 15? e, in questo caso, si deve rispondere: Il passo avanti 5. Sebbene siano questi due diversi quesiti, l'operazione, mediante la quale se ne trova la soluzione, si designa, in entrambi i casi, collo stesso termine. Nel primo caso, si dice che si *divide* il passo -15 per il passo $+5$; nel secondo, che si divide il passo -15 per l'operazione -3.

Cosi, il termine *dividere* riceve due diversi significati. Ma vuol essere osservato che la soluzione è simbolicamente la stessa, in entrambi i casi: sebbene debba essere diversamente interpretata.

Il passo -15 si può egualmente ottenere, triplicando e rivoltando il passo avanti $+5$, e quintuplicando il passo indietro -3. Simbolicamente,

$$(-3)\ (+5) = (+5)\ (-3) = -15.$$

Perciò il quesito « *dividere* — 15 per — 3 » può significare egualmente « qual'è il passo, che, triplicato e rivoltato, produce il passo indietro — 15? » e « qual' è l' operazione, che, eseguita sul passo indietro — 3, produce il passo indietro — 15? » La soluzione del primo quesito è « il passo + 5 »; quella del secondo, « l'operazione consistente nel moltiplicare per 5, mantenendo inalterata la direzione, ossia l'operazione + 5. » Vediamo così che, sebbene il termine *dividere*, come abbiamo precedentemente osservato, si prenda con due diversi significati, per modo che la divisione conduce, secondo il caso, a risultati diversi, pure questi risultati sono espressi dal medesimo simbolo.

In termini generali, il problema « dividere il passo a per il passo b » significa « trovare l'operazione (supposto che vi sia), la quale trasforma b in a. » Invece il problema, « dividere il passo a per l'operazione b » significa « trovare il passo (supposto che vi sia), che, dall'operazione b, è trasformato in a. » Tuttavia la soluzione simbolica è la stessa, in entrambi i casi; e, per trovarla, si deve eseguire la stessa operazione. A tal fine, si deve dividere il numero di a pel numero di b: e applicarvi il segno +, o il —, secondo che i segni di a e di b sono eguali, oppure diversi.

Potremo anche attribuire all'equazione

$$(-3)\,(+5) = -15,$$

donde siamo partiti, l'altro suo significato con cui — 3 e + 5 rappresentano entrambe un'operazione, e — 15 è l'operazione, mediante la quale si ottiene lo stesso risultato come eseguendo le due prime, l' una di seguito all' altra. In questo caso, il problema « dividere l' operazione — 15

per l'operazione — 3 » significa « trovare quell'operazione, che, susseguita dall'operazione — 3, riesce equivalente all'operazione — 15. » In generale « dividere l'operazione a per l'operazione b » significa « trovare l'operazione, che, susseguita da b, riesce equivalente ad a. »

Osserviamo come la divisione di un passo per un passo, e di un'operazione per un'operazione, presentino, l'una coll'altra, una certa analogia, e differiscano, per una comune circostanza, dalla divisione di un passo per un'operazione. Infatti, il risultato della divisione di a per b, che rappresenteremo col simbolo $\frac{a}{b}$, quando a e b rappresentano entrambe un passo, od un'operazione, è un'operazione, che trasforma b in a; ciò che si indicherà abbreviatamente, scrivendo

$$\frac{a}{b} \cdot b = a.$$

Invece, supposto che a indichi un passo, e b un'operazione, il risultato in discorso è un passo, sul quale dev'essere eseguita l'operazione b, per trasformarlo in a; per modo che, in questo caso,

$$b \cdot \frac{a}{b} = a.$$

Il fatto che il risultato simbolico è lo stesso, in entrambi i casi, è espresso dall'eguaglianza

$$\frac{a}{b} \cdot b = b \cdot \frac{a}{b},$$

e, presentato in questa forma, comparisca come un caso della legge commutativa.

Perciò, finchè sta questa legge, non occorrerà mai di dover distinguere simbolicamente i due significati.

Ma, come avremo occasione di vedere in seguito, si presentano altre specie di passi, e di operazioni, per le quali la legge commutativa non sussiste più. Per questo caso, il prof. Cayley ha proposto un'opportuna notazione; egli si vale del simbolo $\frac{a|}{|b}$, per indicare l'operazione, che trasforma b in a, e rappresenta col simbolo $\frac{|a}{b|}$ ciò che, mediante l'operazione b si trasforma in a. Così,

$$\frac{a|}{|b} \cdot b = a; \text{invece, } b \cdot \frac{|a}{b|} = a.$$

Comunque sia, ogniqualvolta si adopererà il simbolo $\frac{a}{b}$, senza aggiungere altre indicazioni, si dovrà intendere che si prende col primo significato, cioè che rappresenta l'operazione che trasforma b in a.

§ 15. *Risultati generali dell' estensione del significato dei termini.*

Osserviamo come, prendendo le mosse dai numeri usuali, siamo venuti a considerare, prima, i passi, mediante i quali si eseguisce l'addizione, e la sottrazione di due numeri, poi le operazioni consistenti nel moltiplicare un passo, mantenendone invariata la direzione, oppure rivoltandolo: e come abbiamo ampiamente esteso il significato di tutti i nostri termini.

Il termine *addizione*, che originariamente non significava altro che l'addizione di due numeri, ha ricevuto in seguito il significato di un' operazione, mediante la quale si compongono due passi, per dedurne un passo risultante, che produce un effetto equivalente a quello che producono i due passi, presi l'uno di seguito all'altro.

Il termine *moltiplicazione*, parimente limitato in principio al caso di due numeri, ha poi ricevuto il significato di un'operazione, mediante la quale si combinano due operazioni, per dedurne un'operazione risultante, che produce un effetto equivalente a quello delle due operazioni successivamente eseguite.

L'addizione e la moltiplicazione dei passi e delle operazioni risultarono dotate delle stesse proprietà, che sono caratteristiche dell' addizione e della moltiplicazione dei numeri. Fu anzi precisamente questo fatto, che c'indusse ad usare in quel nuovo senso i nostri antichi termini. Lo studio degli argomenti, che ci restano da trattare, ci mostrerà un ulteriore sviluppo dello stesso processo; ma, diversamente dal caso ora considerato, le proprietà delle operazioni più semplici non si conserveranno sempre integralmente nelle più complesse; e perciò questa graduale estensione del significato dei termini, se è forse il più potente istrumento di ricerca, che sia mai stato adoperato, si deve però applicare con una cautela proporzionata alla sua importanza.

CAPITOLO II.

SPAZIO

---

§ 1. *I limiti non occupano spazio.*

La geometria è una scienza fisica. Oggetto di essa sono la grandezza, la forma, e la distanza delle cose. E, come, per studiare il *numero* delle cose, abbiamo cominciato col fare una semplice ed ovvia osservazione, e ce ne siamo poi valsi ad ogni passo, per vedere a quali conseguenze ci saprebbe condurre, così, per studiare la forma e la distanza di esse, faremo alcune osservazioni semplicissime, per poi valercene continuamente, e vedere quali conseguenze se ne potranno dedurre.

Queste osservazioni sono:

In primo luogo, che una cosa si può trasportare da un luogo all'altro, senza che per questo cambii la sua grandezza e la sua forma.

In secondo luogo, che più cose possono presentare la stessa forma, ed avere nondimeno grandezze diverse.

Ora, perchè da queste osservazioni si possano dedurre conclusioni precise, è necessario, innanzi tutto, di riconoscerne esattamente il significato.

Ogni cosa prende un certo posto. Una tavola, per esempio, occupa una certa parte della camera in cui si trova, mentre la parte rimanente non è da essa occupata. La presenza dell'oggetto stabilisce una differenza fra le due parti di spazio.

Tra le due parti di spazio così distinte vi è ciò che si chiama la *superficie* della tavola.

Supposto lo spazio, che circonda la tavola tutt'all'ingiro, pieno d'aria, la superficie della tavola sarà qualcosa che sta fra il legno e l'aria, e che separa l'uno dall'altra, senza essere nè una cosa, nè l'altra.

Sarebbe un errore supporre che la superficie della tavola fosse un sottilissimo strato di legno, posto all'esterno di essa. Noi vediamo subito che sarebbe un errore, osservando che ogni ragione che c'inducesse a fare questa supposizione, dovrebbe indurci egualmente a supporre che la superficie della tavola fosse un sottilissimo strato d'aria aderente ad essa. Egli è che la superficie appartiene ad un tempo al legno ed all'aria, e non prende nello spazio alcun posto (*).

(*) È certo che una superficie *naturale*, per quanto possa *sembrare* levigata, basterà che sia osservata con un opportuno ingrandimento, perchè apparisca ruvida. Perciò, nel caso della superficie della tavola e dell'aria, vi sarà probabilmente uno strato nel quale si trovano mescolate insieme particelle d'aria e di legno. In questo caso il limite fra la tavola e l'aria non sarà ciò che noi « vediamo e sentiamo », e non corrisponderà nemmeno alla superficie del geometra. La superficie del geometra, secondo me, va considerata come un « concetto ideale » dedotto dai limiti *apparenti* (non reali) degli oggetti, quali li descrive il testo. Per quanto io creda fermamente nella natura ideale dei concetti geometrici, non ho creduto opportuno di alterare il testo. La distinzione in di scorso fu fatta dallo stesso Clifford (*Essays*, I, p. 306-7, 321) K. P.

Ora si potrà immaginare che parte della superficie della tavola abbia un colore, e parte un altro.

La superficie di questo foglio di carta presenta una macchia rotonda, tinta in nero, di forma circolare. Questo

Fig. 1.

circolo divide la superficie del foglio in due parti: la parte ch'esso occupa, e la parte che non è da esso occupata.

Mentre la superficie, per sè stessa, non occupa spazio, il circolo occupa un certo spazio sulla superficie. Da ciò noi siamo tratti a distinguere due specie di *spazio*; lo spazio volgarmente detto, nel quale si trovano, e si spostano i corpi solidi; e lo spazio superficiale, il quale si può considerare da due diversi punti di vista. Da un punto di vista, esso forma il limite di due parti adjacenti di spazio volgarmente detto, e non prende in esso alcun posto. Dall'altro, è, per sè stesso, un'altra specie di spazio, dove si possono distinguere diverse parti, ciascuna delle quali prende in esso un posto determinato.

Queste parti hanno alla lor volta i loro limiti.

Fra la superficie nera del circolo e la superficie bianca della carta, che si trova tutt'all'ingiro, vi è una linea, la circonferenza del circolo. Questa linea non appartiene nè alla parte bianca, nè alla nera, ma sta fra una parte e l'altra. Essa divide, l'una dall'altra, le due parti, e, nello spazio superficiale, non prende, per sè stessa, alcun posto. Una linea non è una sottilissima lista di superficie, più che la superficie non sia un sottilissimo strato di solido.

Difatti, nel caso immaginato, ogni ragione che potesse indurci a dire che la circonferenza, che forma il limite della macchia nera, è una sottilissima lista nera, ci dovrebbe indurre affatto egualmente a dire che è una sottilissima lista bianca.

Una linea si può parimente dividere in parti. Supposto che il foglio col cerchio nero fosse immerso nell' acqua,

Fig. 2.

in modo da sommergere parte del cerchio, la linea che ne forma il contorno si troverebbe parte sott' acqua e parte fuori.

Ora, la parte sott'acqua occuperebbe sulla linea un certo spazio; perchè sarebbe una certa parte del contorno. Quindi, vi ha luogo a considerare uno spazio lineare, come uno spazio superficiale, e lo spazio volgarmente detto. Così, la linea non prende alcun posto sulla superficie: non è che il confine tra due parti adiacenti di essa. Ancor meno prende posto nello spazio. Eppure, essa rappresenta uno spazio suo particolare, che si può dividere in parti, e da queste parti può essere occupato, e riempito.

Le parti di una linea hanno anch'esse i loro limiti. Fra la parte di circonferenza che si trova sott'acqua, e la parte che ne emerge, vi sono due *punti,* che ne segnano gli estremi. Questi punti non sono nè sott' acqua, nè fuori; sono nella superficie dell' acqua; e contemporaneamente su quella del foglio di carta, e sul contorno del cerchio

nero. Essi appartengono a questa linea, ma non occupano sopra di essa alcun spazio.

Un punto non è un tratto brevissimo di linea, più che la linea non sia una listerella di superficie. Esso forma la divisione di due parti adjacenti della linea, e non prende sulla linea il minimo posto.

Ora, è importante d'osservare che con ciò noi non andiamo dissertando intorno a concetti ideali, ma facciamo invece pure osservazioni di senso comune, sopra fatti che ci presenta la quotidiana esperienza.

La superficie di un oggetto è cosa che noi abbiamo continuamente occasione d'osservare: cosa visibile e palpabile; e l'osservazione che la superficie medesima è comune all'oggetto, e allo spazio che lo circonda, è questione di buon senso.

Una linea, che divide, l'una dall'altra, due parti di una superficie, è parimente qualcosa che l'esperienza ci presenta ad ogni momento. Essa non è un concetto ideale, al quale noi arriviamo, immaginando che un filo diventi infinitamente sottile; ma bensì qualcosa, che, mediante l'osservazione diretta, noi riconosciamo appartenere contemporaneamente ad entrambe le parti di superficie che sono da essa divise, per modo che non può avere una grossezza qualsiasi.

Lo stesso dicasi del punto. Il punto, che, nell'esempio considerato poc'anzi, divide la parte di circonferenza che si trova sott'acqua, dalla parte che ne emerge, è cosa che cade sotto i nostri sensi. Non è un concetto ideale, che otteniamo, immaginando che una particella impiccolisca al di sotto d'ogni limite; è il confine di due parti adjacenti di una linea, la quale è il confine di due parti adjacenti

di superficie, la quale finalmente è il confine di due parti adjacenti di spazio. Il punto è dunque qualcosa di sensibile: e non già un'astrazione fabbricata dalla nostra mente.

Quando parliamo di tracciare una linea, o di segnare un punto sopra un foglio di carta, noi adottiamo il modo di dire dei disegnatori, non teniamo un linguaggio da geometri. Ecco, nell'unita figura, il disegno di un cubo rap-

Fig. 3.

presentato per mezzo di *linee*, nel senso che il disegnatore attribuisce a questa parola. Ognuna di queste così dette « linee » è una riga d'inchiostro da stampa, di grossezza variabile, la quale, sul foglio, occupa un certo spazio. Quindi, tracciando una serie di siffatte « linee », sufficientemente compatta, si potrà interamente ricoprire una lista di carta, di grandezza qualsivoglia. Ora, ogni riga ha una linea per parte, la quale divide la superficie tinta in nero dalla superficie bianca. Queste sono vere linee geometriche, che, nello spazio superficiale, non prendono alcun posto. Diversamente dal precedente caso, supposto che queste linee si potessero segnare, se ne potrebbero inserire milioni e milioni fra i limiti di una delle nostre righe; e, fra due qualunque, avanzerebbe sempre tanto posto da potervene inserire altri milioni.

Comunque sia, per tracciare le figure geometriche, si ricorre, con molto vantaggio, allo spediente di rappre-

sentare le linee per mezzo di righe nere. Per evitare ogni possibile equivoco, che da ciò potesse nascere, gioverà fissare il modo in cui una riga deve rappresentare una linea, facendo una volta per sempre la seguente convenzione. Quando la riga è verticale, cioè pel lungo del foglio, come questa |, la *linea* da essa rappresentata sarà il suo *orlo destro*. In ogni altro caso, la linea sarà l'*orlo superiore* della riga.

Analogamente nel caso di un punto. Un punto si suol rappresentare, facendo sul foglio un puntino nero, ossia una macchietta di forma più o meno irregolare. Questa macchietta avrà per contorno una certa linea. Orbene, quando un punto di questo contorno sia, per avventura, superiore a tutti gli altri, esso sarà il punto, che si vuol rappresentare mediante il puntino. Quando invece più punti del contorno si troveranno allo stesso livello, e nessun altro sarà più alto di essi, per modo che il contorno terminerà superiormente con un tratto orizzontale, il punto rappresentato dal puntino sarà l'estremo destro di questo tratto.

Questa specificazione del significato delle figure non ha alcuna pratica utilità; e noi potremo farne a meno, purchè il lettore non commetta l'errore di prendere macchiette e righe per punti e linee geometriche.

§ 2. *Le lunghezze si possono trasportare, senza che per questo si alterino.*

Premesse queste nozioni, esaminiamo il significato della prima delle nostre due osservazioni intorno allo spazio: cioè, che una cosa si può trasportare da un luogo all'altro,

senza che per questo cambii la sua grandezza, e la sua forma.

Occupiamoci, in primo luogo, di quanto concerne la grandezza. La grandezza di una cosa si determina, misurando la mutua distanza di varii punti di essa. Così, per esempio, per trovare la grandezza di una tavola, noi la misureremo, o pel lungo, o pel largo, o dall'alto al basso, ciò che tornerà sempre a prendere due punti di essa, e misurarne la distanza. Condizione indispensabile, per poter eseguire la misura di una distanza, è quella d'aver qualche cosa, come sarebbe un regolo, od un nastro, che si possa trasportare da un luogo all'altro, e, mentre si trasporta, mantenga sempre la stessa lunghezza. Una volta che si disponga di tale strumento, la misura si eseguisce, mettendolo al posto della distanza che si tratta di misurare, e osservando qual parte di esso coincide colla distanza medesima.

Due lunghezze, o due distanze, si dicono *eguali,* quando corrisponde ad entrambe una stessa parte della misura. Così si dirà che due tavole hanno la stessa larghezza, quando, segnata la larghezza di una di esse sopra un nastro, applicandolo all'altra, si troverà che la sua larghezza corrisponde ai medesimi segni. Ora, se, per fare questo confronto, gioverà valersi del nastro, non sarà perciò necessario di ricorrere a tale spediente. Noi potremmo trovare egualmente che le due tavole hanno la stessa larghezza, prendendone una, e ponendola capovolta al di sopra dell'altra. Ciò che diciamo di due tavole, si potrà dire di due altre cose qualsiansi; in generale, due lunghezze, o due distanze qualunque, saranno eguali, quando applicando l'una di esse all'altra, vi si potrà adattare esattamente, senza che occorra

per questo d'alterarla. Se non che, per tornare al nostro esempio, un nastro è qualcosa che si trasporta più comodamente d'una tavola; e perciò in pratica si preferirà di verificare l'eguaglianza delle due larghezze, confrontandole collo stesso pezzo di nastro. Supposto che ciascuna di esse risulti eguale alla stessa lunghezza di nastro, noi ne dedurremo che sono fra loro eguali, ammettendo che *due lunghezze eguali ad una terza sono eguali fra loro.* Ora, ciò torna ad ammettere che, se al nastro si farà descrivere un cammino chiuso qualsivoglia, per ricondurlo finalmente alla sua posizione originaria, la sua lunghezza non ne verrà alterata.

In qual modo? Supponiamo che il nastro considerato, quando non s'adopera, si mantenga disteso lungo un regolo, in modo che uno de' suoi capi corrisponda ad un segno inciso sul regolo. Noi sappiamo che cosa significa dire che due lunghezze, misurate col nastro, a partire da quel capo, risultano eguali. Ciò posto, prendiamo tre tavole, A, B, C, e supponiamo che, misurandole, la larghezza di A risulti eguale a quella di B, e questa a quella di C; pel precedente postulato, diremo, in tal caso, che la larghezza di A e quella di C sono fra loro eguali. Ora, ciò vuol dire che, segnata sul nastro la larghezza di A, portando questa lunghezza sopra B, si troverà che corrisponde egualmente alla larghezza di B; e portandola poi sopra C, si troverà che corrisponde alla larghezza di C, come a quella di B. D'altra parte, affermando che la larghezza di C sarà eguale a quella di A, si asserisce che, trasportando la lunghezza medesima da C ad A, passando o no per B, si troverà che, come alla larghezza di C, corrisponde a quella di A. Quindi, in conclusione, noi affermiamo che,

trasportando il nastro da A a B, poi da B a C, e finalmenta da C di nuovo ad A, supposto che al principio corrispondesse alla larghezza di A, vi corrisponderà egualmente in fine.

Da queste considerazioni noi siamo tratti ad una conclusione assai singolare. Il lettore avrà probabilmente notato come abbiamo definito la lunghezza, o la distanza, per mezzo di una misura, che si possa trasportare da un luogo all'altro, *senza che ne varii la lunghezza*. Ora, in qual modo si potrebbe verificare, se una misura possiede questa proprietà? Noi potremo bensì trasportare ad un tempo un metro, in forma di regolo, per confrontare con esso il nastro; ma tutto ciò che potremo dimostrare a questo modo sarà che un certo pezzo di nastro e di regolo, ogniqualvolta si trovano allo stesso posto, presentano lunghezze eguali: non già che queste lunghezze si mantengano inalterate.

Egli è che noi potremmo fare egualmente l'ipotesi che le cose cambiassero di lunghezza, pel solo fatto che si trasportano da un luogo all'altro; e, purchè si supponesse: 1.° che tutte le cose cambiassero egualmente; 2.° che ogni cosa, ricondotta alla sua posizione originaria, occupasse lo stesso spazio di prima, non si cadrebbe per questo in alcuna contraddizione coi fatti osservati. Ciò che v'ha di positivo è puramente questo, che due cose, che si possono adattare esattamente l'una all'altra, in un posto, si potranno egualmente adattare in qualsiasi altro, ancorchè vi siano recate per diversi cammini; a meno che, ben inteso, non vi sia qualche ragione, estranea al puro fatto del movimento, perchè avvenga il contrario. Così, un pezzo di nastro, e un regolo, che si adattano esattamente l'uno

all'altro, a Milano, si adatteranno egualmente anche a Nuova York; ancorchè il regolo vi sia trasportato attraverso all'Atlantico, e il nastro attraverso l'India e il Pacifico. Naturalmente, potrà darsi che, per l'umidità, il regolo si gonfii, e che il nastro si contragga per la secchezza dell'aria; alterazioni di questa natura, dipendenti da circostanze estranee alla geometria, saranno sempre possibili. Ma, fatta astrazione da esse, per quanto dipende dalle sole condizioni geometriche, cioè puramente dal trasporto, e dal cambiamento di posto, due cose che si adattano l'una all'altra, in un luogo, si adatteranno egualmente, in qualsiasi altro.

Su questo fatto, come abbiamo veduto, si fondano la nozione di misura d'una lunghezza, e l'assioma che due lunghezze eguali ad una terza sono eguali fra loro.

Ora, potrà darsi che le lunghezze si alterino, pel solo fatto che si trasportano da un luogo all'altro, senza che noi ce ne accorgiamo?

Chiunque voglia meditare seriamente su questa questione, finirà per convincersi che essa è interamente priva di senso. Ma il tempo che s'impiegherà ad arrivare a questa conclusione non sarà completamente sprecato.

§ 3. *Le proprietà caratteristiche della forma.*

Così, abbiamo veduto che cosa significa dire che una cosa si può trasportare da un luogo ad un altro, senza che per questo ne cambii la grandezza; ciò significa che una lunghezza qualunque, la quale corrisponde ad una determinata misura, in un certo posto, vi corrisponderà parimente in qualsiasi altro, qualunque sia il cammino

seguito così dalla cosa considerata, come dalla misura con cui si confronta, per giungere al posto medesimo. Vediamo ora che cosa s'intende col dire che una cosa si può trasportare da un luogo all'altro, senza che ne cambii la forma.

A tal fine, osserviamo, in primo luogo, come la forma di una cosa non dipenda che dalla superficie che ne forma il limite, e punto dall'interno: per modo che noi potremo sempre parlare della forma della superficie, e sarà come parlare di quella della cosa.

Fig. 1.

Ciò premesso, notiamo alcune proprietà caratteristiche delle superficie. Qui vediamo un cubo, un cilindro, ed una sfera. La superficie del cubo si compone di sei faccie piatte, e presenta spigoli e vertici. Il cilindro ha due faccie piatte agli estremi, ed una superficie rotonda, divisa da ciascuna faccia terminale, per mezzo di uno spigolo circolare. La sfera ha una superficie tutta quanta rotonda, e perfettamente liscia.

La gran differenza di forma, che presentano le parti *liscie* d'una superficie, in confronto degli *spigoli*, e dei *vertici*, salta immediatamente all'occhio. Uno spigolo, essendo una linea, non è una *parte* della superficie, nel senso che vi occupi un certo spazio; ancor meno lo potrebbe essere un vertice, che è semplicemente un punto. Ciò non toglie però che possiamo distinguere i punti di una super-

ficie in punti dove la superficie è liscia (come sono tutti quelli della sfera, quelli della superficie rotonda, e delle basi del cilindro, e quelli delle faccie del cubo), punti appartenenti ad uno spigolo, e vertici. Per brevità di discorso, gioverà distinguere queste tre specie di punti coi termini di *punti lisci, punti di spigolo,* e *punti di vertice;* e, mettendo insieme gli spigoli e i vertici, potremo anche comprendere le due ultime specie nel nome generico di *punti ruvidi.*

Ora, prendiamo la sfera, e posiamola sopra una delle faccie del cubo (fig. 5).

Fig. 5.

I due corpi si toccheranno per un punto; vale a dire un certo punto della superficie della sfera, ed un certo punto di quella del cubo concideranno, per modo da formarne uno solo. Questi due punti sono entrambi punti lisci. Ora, *per poco che si mova la sfera, essi si separano.* Appena la sfera cominci a rotolare sulla faccia del cubo, il contatto si stabilisce fra due punti dei due corpi, l'uno e l'altro diversi dai primitivi. Lo stesso fatto si verificherà, posando la sfera sulla superficie rotonda del cilindro, o sopra una delle sue basi, in modo che tocchi un punto liscio (fig. 6).

Posiamo invece, sopra una faccia del cubo, la parte rotonda del cilindro. In questo caso, le due superficie si toc-

Fig. 6.

cheranno lungo tutta una linea. Ad ogni punto di questa linea, due punti, l'uno appartenente alla superficie del cilindro, l'altro a quella del cubo, coincideranno per modo da formarne uno solo. Essi saranno entrambi punti lisci. E, come nel caso precedente, essi si separano, per poco che si movano i due corpi, l'uno per rispetto all'altro.

Fig. 7.

Appena il cilindro cominci a rotolare sulla faccia del cubo, il contatto si stabilirà fra una linea del cilindro, ed una linea del cubo, diverse, l'una e l'altra, da quelle di prima; e perciò i punti di contatto saranno tutti cambiati.

Finalmente posiamo sulla faccia del cubo una delle basi del cilindro. Le due superficie si applicheranno l'una all'altra, per tutta la loro estensione, per modo da non farne più che una sola; quindi i due corpi non si toccheranno, come prima, per un punto, o lungo una linea, ma secondo una superficie. Fissiamo nella base del cilindro

un punto qualsiasi; esso coinciderà con un certo punto della faccia del cubo; e questi due punti saranno lisci Orbene, noi osserviamo, anche in questo caso, che *i due*

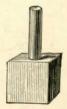



Fig. 8.

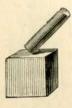
punti si separano, per poco che uno dei due corpi si mova per rispetto all'altro (*).

(*) In tutti questi casi (fig. 5-8) il moto relativo di cui si parla deve essere di *traslazione* o d'*inclinazione;* una *rotazione* intorno ad un asse verticale non separerebbe i punti di contatto. La vera distinzione fra il contatto dei punti lisci, e quello di un punto liscio con un punto ruvido mi sembra consistere in ciò, che i punti di contatto non sono separati, nel primo caso, soltanto da un moto definito da *una sola* coordinata (con *un solo* grado di libertà) — una rotazione intorno ad un asse normale alle superficie liscie nei punti in questione: e nel secondo caso, almeno da un moto definito da due cordinate (punto di spigolo e punto liscio), e in genere da moti definiti da un numero illimitato di coordinate (con un numero illimitato di gradi di libertà) — rotazioni intorno a due o più assi passanti pel punto ruvido. Il lettore capirà meglio quando avrà visto il capitolo sul moto. — K. P.

Osserviamo che l'autore insiste più volte sulla circostanza che il moto alteri la posizione relativa dei due corpi a contatto; ciò che, prescindendo dalla posizione relativa dei singoli punti, non fa, nei casi considerati, una rotazione intorno ad una retta passante pel punto di contatto, e normale alle superficie che ivi si toccano.

Nota del Traduttore.

Se non che, in quest' ultimo caso, si presenta una circostanza, della quale noi approfitteremo per ampliare le nostre cognizioni. Noi abbiamo tacitamente supposto che

Fig. 9.

la base del cilindro fosse più piccola della faccia del cubo. Ora, supponiamo che, poste le due superficie a contatto, il cilindro stia in mezzo al cubo, come nella fig. 8, per modo che il cerchio, che ne forma la base, sia tutto compreso nel quadrato, che forma la faccia del cubo. In tal caso, il cilindro, inclinandolo, si ridurrà nella posizione rappresentata dalla fig. 9.

Conformemente a quanto abbiamo osservato, in seguito a questo spostamento, tutti i punti lisci delle superficie dell'uno e dell'altro corpo, che prima coincidevano, si separeranno. Ma due punti seguiteranno a coincidere. Difatti, nella posizione inclinata, il cilindro posa sopra un punto della faccia del cubo, per un punto del suo spigolo circolare; e questi due punti coincidono egualmente nella posizione primitiva.

Noi potremo inclinare il cilindro più o meno, e, purchè lo incliniamo sempre nella stessa direzione, per modo che non rotoli sullo spigolo, questi due punti si manterranno sempre uniti. Vediamo così che, *quando un punto di spi-*

golo tocca un punto liscio, si potrà movere uno dei due corpi relativamente all'altro, senza che i due punti si separino per questo.

Lo stesso fatto si osserverà, applicando la superficie rotonda, o una base, del cilindro ad uno spigolo del cubo, oppure applicando la sfera ad uno spigolo dell'uno o dell'altro corpo. Mantenendo fisso uno dei due corpi, si potrà movere l'altro, in modo che restino sempre a contatto gli stessi due punti; se non che, a tal fine, si dovrà sempre inclinarlo nella stessa direzione.

Invece, posto un *vertice* del cubo a contatto di un punto liscio del cilindro, come rappresenta la fig. 10, questi due

Fig. 10.

punti si manterranno uniti, in qualunque direzione s'inclini l'uno o l'altro corpo. Così, potremo inclinare comunque il cubo, e ad un tempo mantenere il suo vertice sempre a contatto dello stesso punto liscio del cilindro.

Facendo toccare due punti di spigolo, il risultato sarà diverso, secondo che i due spigoli, nel punto di contatto, avranno la stessa direzione, oppure s'incroceranno. Nel primo caso, per mantenere i due punti uniti, bisognerà inclinare in una certa direzione; nel secondo, si potrà inclinare in una direzione qualunque. Parimente, quando un vertice tocca un punto di spigolo, la direzione in cui

si deve inclinare il corpo non andrà soggetta ad alcuna restrizione; e molto meno quando un vertice è a contatto d'un vertice.

La conclusione che emerge da tutto ciò è che, *in un certo senso, tutte le superficie, nei loro punti lisci, presentano la stessa forma.*

Difatti, per ciò che abbiamo veduto, posti due punti lisci a contatto, ivi le supercie si adattano l'una all'altra, in tal modo che non si può movere una di esse per rispetto all'altra, senza staccare i due punti (*).

Ora, a questo stesso modo possono adattarsi l'uno all'altro anche due spigoli, purchè uno di essi sia rientrante (cioè sia una rientranza della superficie, invece di una sporgenza), come si vede nella fig. 11; ed esaminando questo caso, si vedrà meglio come sia opportuno il dire che due superficie presentano la stessa forma, ad un punto dove si adattano l'una all'altra in quel modo.

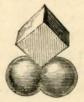
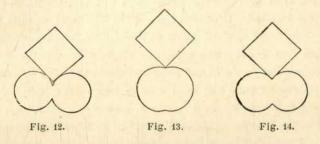



Fig. 11.

Il corpo rappresentato dall'annessa figura, che supponiamo si ponga a contatto col cubo, è formato, riunendo due sfere, dalle quali è stato troncato un pezzo. Supposto che

(*) Vedesi tuttavia la nota a pag. 69 — K P.

questo pezzo sia una piccolissima parte della sfera, lo spigolo rientrante sarà proporzionatamente molto acuto, e lo spigolo del cubo non si potrà inserire nella rientranza abbastanza profondamente per ridurlo a contatto di esso (fig. 12); supposto invece che dalle due sfere sia troncata

Fig. 12. Fig. 13. Fig. 14.

circa una metà, lo spigolo rientrante sarà molto aperto, e il cubo, introdotto nella rientranza, vi potrà barcollare (fig. 13). È chiaro che vi sarà una forma irtermedia, nella quale i due spigoli si adatteranno esattamente (fig. 14); per modo che si potranno ridurre a contatto, senza che il cubo possa barcollare nella rientranza.

In questo caso, sebbene uno spigolo sporga, e l'altro sia un solco, pure dobbiam dire che, lungo quello spigolo, le due superficie presentano la stessa forma. Difatti, supposto che la nostra doppia sfera sia di legno, la sua superficie non sarà soltanto superficie del legno, ma anche dell'aria che lo circonda; e ciò che è una rientranza, od un solco, del legno, è, al tempo stesso, una sporgenza dell'aria. Allo stesso modo, ogni spigolo sporgente, ed ogni vertice del cubo è al tempo stesso un solco e una depressione dell'aria. Ora, la *superficie* appartiene egualmente al corpo e all'aria; non fa differenza alcuna fra interno

ed esterno; elevazione e depressione sono, per rispetto ad essa, termini completamente arbitrarii. Non altrimenti, in una lamina di metallo, che presenta un'ammaccatura, se da una parte vi è un'elevazione, ciò vuol dire che vi è una depressione dall'altra, e *viceversa;* ma è affatto arbitrario di considerare piuttosto l'una che l'altra parte come la *giusta.* (Notiamo bene però che una lamina di metallo non è in alcun modo un'immagine d'una *superficie;* essa non è altro che un sottile strato solido, le due superficie del quale hanno prossimamente la stessa forma). Apparisce da ciò che lo spigolo di legno del nostro cubo avrà la stessa forma come lo spigolo d'aria della doppia sfera; o, ciò che torna lo stesso, che le superficie dei due corpi avranno lungo lo spigolo la stessa forma.

Ora, la doppia sfera si potrà sempre modificare in modo che lo spigolo presenti quella forma che si vuole; e perciò si presta assai bene al nostro scopo. Si è supposto finora che da ciascuna sfera fosse troncata una parte minore della metà; noi possiamo immaginare che siano saldati insieme anche questi pezzi, per modo da formare un solido con uno spigolo sporgente.

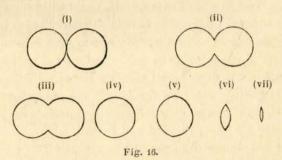
Qualunque sia la parte troncata, questo spigolo, e lo spigolo rientrante del solido formato riunendo i pezzi più grossi, avranno sempre la stessa forma; cioè i due solidi

Fig. 15.

si potranno adattare esattamente l'uno all'altro, secondo il rispettivo spigolo, nel senso poc'anzi spiegato.

Ciò posto, supponiamo che dalle due sfere sia segata una parte assai prossima ad una metà. (S'intende che dev'essere segata da entrambe una stessa parte, altrimenti i pezzi non potrebbero combaciare esattamente). In tal caso, saldando insieme i più grossi e i più piccoli pezzi, formeremo due solidi forniti di spigoli molto ottusi. Lo spigolo sporgente sarà un leggerissimo rialzamento, e una leggerissima depressione, lo spigolo rientrante.

Facendo un passo ancora, e segando le due sfere esattamente per metà, è chiaro che i due nuovi solidi saranno parimente due sfere; per modo che non vi sarà più nè rialzamento, nè depressione, e la superficie sarà tutta quanta liscia. Ma si noti che arriviamo a questo risultato, immaginando che uno spigolo sporgente vada aprendosi sempre più, finchè scompare ogni rialzamento; oppure, immaginando che uno spigolo rientrante vada aprendosi sempre più, finchè scomparisce ogni depressione. Si potrà

Fig. 16.

anche immaginare che lo spigolo sporgente vada sempre più aprendosi, finchè si spiana completamente, e si trasformi poi in uno spigolo rientrante. Questa evoluzione continua si potrà presentare all'occhio, introducendo in

un zootropo una serie di figure, come quelle che rappresenta la fig. 16. Girando rapidamente il disco, si vedranno le due sfere, in principio separate, fondersi in un unico solido, come (ii) e (iii), poi formare una sola sfera, come (iv), poi contrarsi, formando una lente sempre più piccola, come (v), (vi), (vii).

Ciò che specialmente importa di notare è che la sfera rappresentata da (iv), è uno stadio dell'evoluzione; donde apparisce che *un punto liscio è un caso particolare di un punto di spigolo, intermedio tra il caso di uno spigolo sporgente, e quello di uno spigolo rientrante.* Per questa ragione, estendendo ai punti lisci le proprietà dei punti di spigolo, noi diciamo che le superficie ad ogni punto liscio presentano la stessa forma.

§ 4. *Proprietà caratteristiche dei contorni delle superficie.*

Osservazioni analoghe a queste, che abbiamo fatto intorno ai corpi solidi, ossia ai pezzi di spazio, preso questo vocabolo col significato usuale, si potranno fare intorno ai pezzi di superficie. Veramente la forma di un pezzo di superficie non dipende interamente da quella della linea che lo limita. Pure, questa è la sola cosa che ci resta da considerare; poichè della forma della superficie racchiusa ci siamo già occupati quanto ci basta.

Gioverà limitarsi anche di più, e considerare soltanto dei contorni, che non racchiudono alcun punto ruvido. Così, un pezzo della superficie del cubo dovrà stare tutto quanto in una delle faccie; e un pezzo di superficie del cilindro, in una delle basi, o nella superficie tonda, nè potrà essere composto, per esempio, di una base e di una parte della superficie tonda.

Ciò posto, le proprietà dei contorni, che si tratta di considerare, si potranno studiare sufficientemente, per mezzo di figure disegnate sulla carta. Avvolgendo poi il foglio, potremo verificare che le stesse proprietà generali appartengono anche alle figure che si possono disegnare sopra un cilindro; e, per farci idee perfettamente chiare, varrà la pena di disegnare qualche figura sopra una sfera, e sopra qualche altra superficie analoga.

La fig. 17 rappresenta dei pezzi di superficie di forma diversa: un quadrato, una figura con tre vertici, due circoli parzialmente sovrapposti. La parte dove i due cerchii

Fig. 17.

si sovrappongono, perchè si distingua a colpo d'occhio, si è lasciata in bianco.

Facendo ora specialmente attenzione al contorno di questi pezzi, noi osserviamo ch'esso presenta parti liscie e vertici o angoli, alcuni sporgenti, altri rientranti. I pezzi di superficie non sono, per loro natura, mobili, come le parti di spazio precedentemente considerate; tuttavia potremo riprodurre, fino ad un certo punto, gli esperimenti che abbiamo immaginato di fare coi solidi, ritagliando le figure con un temperino, e facendo così altrettanti buchi, che serviranno a fissare la primitiva posizione delle figure medesime. Ciò fatto, applicando i pezzi ritagliati, l'uno all'altro, oppure ai buchi, troveremo che, quando i contorni di due figure si toccano secondo due punti lisci, ivi si

adattano l'una all'altra, in tal modo che i due punti si staccano, per poco che si faccia rotolare una figura sull'altra; mentre, ove si tocchino un angolo ed un punto liscio, si potrà spostare una delle due figure per rispetto all'altra, senza che i due punti si separino. Procurando poi di far coincidere due angoli, senza che le figure si sovrappongano, si presenteranno fatti analoghi a quelli che abbiamo osservato, quando si trattava di far coincidere gli spigoli di due solidi. Supponiamo, per esempio, che si tratti d'introdurre un angolo del quadrato in uno degli angoli rientranti della figura formata da due cerchii parzialmente sovrapposti. Se l'angolo rientrante sarà troppo acuto, l'angolo del quadrato non vi potrà penetrare; e questo è il caso della fig. 12. Se invece sarà abbastanza ottuso, il quadrato vi potrà barcollare; e questo è il caso della fig. 13. Tra l'uno e l'altro, vi sarà un caso intermedio, nel quale i due angoli si adatteranno l'uno all'altro esattamente; vale a dire, nel quale i due angoli si potranno ridurre a contatto, ma il quadrato non potrà minimamente barcollare. In questo caso noi diciamo che i due angoli hanno la stessa forma, ossia che sono *eguali* l'uno all'altro.

Da tutto ciò noi siamo tratti a conchiudere che la *forma è affare di angoli*, e che da un'eguaglianza di angoli dipende l'eguaglianza della forma. Per trattare della grandezza dei corpi, ci è bastato di considerare un semplice caso di essa, la lunghezza, ossia la distanza di due punti; e abbiamo osservato come si possa determinare tutto ciò che occorre di conoscere intorno alla grandezza di un corpo, misurando un numero sufficiente di lunghezze, in

varie direzioni. È certo che anche la forma del corpo riuscirebbe nota, quando si conoscessero tutte le lunghezze che vi si possono concepire misurate; ma tuttavia la lunghezza non è per sè stessa un elemento della forma. Ciò che, dal nostro punto di vista attuale, sostiene, per rispetto alla forma, la stessa parte che la lunghezza, per rispetto alla grandezza dei corpi, è l'angolo. In altre parole, come diciamo che due corpi hanno la stessa grandezza, quando ad ogni linea, che si può descrivere in uno di essi, ne corrisponde una perfettamente eguale, che si può descrivere nell'altro, così diciamo che due corpi hanno la stessa forma, quando ad ogni angolo, che si può costruire sopra uno di essi, ne corrisponde uno perfettamente eguale, che si può costruire sull'altro.

Come le lunghezze per mezzo di un regolo, o di un nastro, gli angoli si misurano col compasso; e si dice che due angoli sono eguali quando corrispondono ad una stessa apertura. Ciò posto, si vedrà, come nel caso precedente, che la proposizione, che una cosa può spostarsi senza cambiare di forma, si riduce in sostanza a questa, che due angoli, i quali coincidono in un luogo, coincideranno anche in qualsiasi altro, comunque vi siano trasportati.

§ 5. *Il piano e la linea retta.*

Dobbiamo ora trattare di una superficie e di una linea particolare, che, in geometria, sostengono una parte importantissima: la superficie *piana* e la linea *retta*.

La superficie piana si può definire come una superficie che in tutta la sua estensione, e da ambe le parti, presenta la stessa forma. Questa sua proprietà è messa in evidenza

dal metodo, che serve praticamente per formarla, il quale consiste nel prendere tre superficie e schiacciarle, finchè combaciano, a due a due, l'una coll'altra, in tutta la loro estensione (*). Infatti, distinguendo le tre superficie colle lettere A, B, C, perchè A combacia con B, lo spazio esterno ad A deve avere la stessa forma che lo spazio interno a B; e, analogamente, poichè B combacia con C, lo spazio interno a B deve avere la stessa forma che lo spazio esterno a C. Segue da ciò che lo spazio esterno ad A e lo spazio esterno a C devono avere la stessa forma. Ma poichè, applicando A a C, le due superficie combaciano l'una coll'altra, lo spazio esterno a C deve avere la stessa forma che lo spazio interno ad A. Per conseguenza, lo spazio interno ad A, e lo spazio esterno avranno la stessa forma; e concludiamo che, se tre superficie si schiacciano insieme, in modo che, a due a due, combacino l'una coll'altra, ognuna di esse diventa una superficie che, da entrambe le parti, presenta la stessa forma. Ciò vuol dire che, preso un corpo parzialmente limitato da una superficie piana, potremo farlo scivolare sopra una superficie della stessa natura, e vi resterà sempre aderente: che, se lo faremo girare dall'altra parte della superficie, vi si adatterà da questa parte, come dall'altra. Questa proprietà si enuncia talvolta con termini più tecnici, dicendo che il

(*) Così, il fabbro, per formare una lamina piana, la batte sull'incudine, finchè la faccia del martello, e quella dell'incudine, che combaciano l'una coll'altra, combaciano anche colla lamina. Gioverà osservare che queste superficie si potranno immaginare estese a piacere, senza cambiare sostanzialmente l'esperimento.

Nota del Traduttore.

piano è una superficie che divide lo spazio in due *regioni congruenti*.

La linea retta si può definire, in modo analogo, come una linea che divide una superficie piana in due parti, le quali, per quanto dipende da essa (*), hanno la stessa forma; ossia, ciò che torna lo stesso, come una linea che presenta la stessa forma in tutta la sua estensione, e da ambe le parti.

Un corpo potrà presentare due superficie piane, vale a dire, due parti di esso potranno essere limitate, l'una da un piano, e l'altra da un altro. Se queste due superficie piane avranno uno spigolo comune, questo spigolo, chiamato la loro *intersezione*, sarà una linea retta. Perciò la linea retta, se si vuole, si può anche definire come l'intersezione di due piani.

È ben inteso che, quando parte della superficie d'un corpo è piana, il piano si potrà concepire esteso oltre il corpo, in tutte le direzioni possibili. Per esempio, una tavola termina superiormente con una superficie piana e orizzontale; e ognun capisce che cosa vuol dire un punto qualunque della camera più alto, o più basso, di questa superficie. Orbene, i punti più alti sono divisi dai punti più bassi da una superficie ideale, che si concepisce come una continuazione della superficie piana della tavola. Perciò si potrà parlare dell'intersezione di due superficie piane di un corpo, siano esse o no parti adjacenti della superficie complessiva del corpo, e si potrà sempre im-

(*) Vale a dire, fatta astrazione dal resto del contorno delle due parti, che si può immaginare preso ad arbitrio

Nota del Traduttore.

maginare che s'incontrino l'una coll'altra, e che si prolunghino oltre lo spigolo, secondo il quale s'incontrano.

Leibniz, che diede pel primo queste definizioni del piano e della retta, definì la retta anche in un altro modo. Un corpo, di cui due punti si mantengono fissi, non si potrà liberamente trasportare da un luogo all'altro, ma potrà girare. Allora, cambieranno di posto tutti i punti di esso, eccettuati quelli che si trovano sulla linea retta che congiunge i due punti fissi; e Leibniz, conformemente a ciò, definì la linea retta come il complesso dei punti di un corpo, che non si spostano, quando il corpo gira intorno a due punti fissi. Supponendo che il corpo abbia una faccia piana passante per questi punti, si ricadrà sulla precedente definizione, secondo la quale la linea retta è l'intersezione di due piani.

È appena necessario di mostrare come le due precedenti definizioni che si possono dare del piano siano fra loro equivalenti: vale a dire, come due superficie, che hanno, in tutta la loro estensione, e da ambe le parti, la stessa forma, devono avere per intersezione una linea egualmente della stessa forma, in tutta la sua estensione, e da ambe le parti. Difatti, se s'immagina che l'una o l'altra delle due superficie scivoli sopra sè stessa, poichè presenta in tutta la sua estensione la stessa forma, dovunque vi era prima una parte di essa, ve ne sarà una parte, quantunque diversa dalla precedente, anche dopo, e perciò la superficie, come un tutto, occuperà sempre la stessa posizione. Quindi la linea d'intersezione delle due superficie, scivolando lungo sè stessa, occuperà sempre complessivamente la stessa posizione, sebbene cambii la parte della linea che occupa una posizione determinata: e da ciò apparisce che la linea medesima deve avere la

stessa forma in tutta la sua estensione. Per la stessa ragione, la posizione complessivamente occupata dalle due superficie resterà sempre la stessa, capovolgendole e facendole girare in modo che si scambiino di posto la parte superiore e l'inferiore, la destra e la sinistra. Ora, ciò torna a invertire, capo per capo, la linea d'intersezione; e poichè la linea medesima riprende la posizione di prima, la sua forma dev'essere la stessa da ambe le parti.

Dalla prima definizione, apparisce che due linee rette non possono coincidere per un certo tratto, e poi divergere l'una dall'altra. Difatti, poichè la linea retta divide il piano in due parti di egual forma, staccandone una, e applicandola capovolta all'altra, essa vi si dovrà adattare esattamente. Ora, è evidente che, nel caso supposto, se ciò si verifica per una delle due rette, non potrà verificarsi anche per l'altra; perchè, o si leverà un pezzo di più che nel caso della prima retta, per coprire una parte contenente un pezzo di meno, o si leverà un pezzo di meno, per coprire una parte contenente un pezzo di più.

§ 6. *Proprietà dei triangoli.*

Ora possiamo ridurre la nostra prima osservazione sullo spazio, che un corpo vi si può trasportare, senza che cambii per questo la sua grandezza e la sua forma, a termini più precisi. Supponiamo che una faccia del corpo considerato sia un *triangolo*, cioè un pezzo di piano limitato da tre linee rette. Questo triangolo si potrà trasportare da una posizione ad un'altra qualsivoglia, senza che cambii la lunghezza dei suoi lati, o che si alterino i suoi angoli: ossia, enunciando la proposizione sotto altra forma,

descritto un triangolo qualsiasi, se ne potrà descrivere un altro della stessa grandezza, e della stessa forma, in qualunque parte dello spazio.

Segue da ciò che due triangoli, i quali hanno un lato, e i due angoli posti agli estremi di esso rispettivamente eguali, non sono altro che uno stesso triangolo in due diverse posizioni: cioè hanno la stessa grandezza, e la stessa forma. Difatti, prendendo il primo triangolo, e sovrapponendolo all'altro, in modo che i due lati eguali coincidano, siccome gli angoli posti agli estremi dell'uno sono rispettivamente eguali agli angoli posti agli estremi dell'altro, gli altri due lati del primo triangolo in principio dovranno coincidere cogli altri due lati del secondo. Ma abbiamo veduto che due linee rette non possono coincidere per un tratto, per breve che sia, e poi divergere l' una dall' altra; e per conseguenza questi lati coincideranno per tutta la loro lunghezza, e i due triangoli si adatteranno esattamente l' uno all' altro.

La nostra seconda osservazione, che vi possono essere corpi della stessa forma, e nondimeno di diversa grandezza, si può rendere parimente più precisa, applicandola al caso dei triangoli. Essa insegna che ogni triangolo si potrà ingrandire, o impiccolire, in una misura qualsivoglia, senza alternarne gli angoli: ossia che, descritto un triangolo, se ne potrà descrivere un altro avente gli stessi angoli, di qualunque grandezza, e in qualunque parte dello spazio.

Da questa proposizione si deducono due importantissime conseguenze: l' una, che due linee rette non si possono segare in più di un punto; l'altra, che, se si possono descrivere, in uno stesso piano, due rette che non si segano,

gli angoli formati da esse con una terza retta, posta nel medesimo piano, che le incontra, saranno eguali.

Per dimostrare la prima, siano AB e AC (fig. 18) due rette che s'incontrano in A. Descriviamo una terza retta BC, che le incontri entrambe; le tre rette formeranno un triangolo. Allora, se immaginiamo che un punto P scorra lungo la retta AB, in virtù della seconda osservazione, da questo punto si dovrà sempre poter descrivere una retta che incontri AC in Q, in modo da formare il triangolo APQ, della stessa forma di ABC. Ora, se la linea AC incontrasse

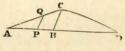



Fig. 18.

AB in qualche altro punto, D, oltre che in A, per questo punto non si potrebbe descrivere una retta, in modo da formare con AC e AB un triangolo qualsiasi. Perciò un punto come D non può esistere; e due rette, una volta che si sono incontrate, andranno sempre più divergendo l'una dall'altra, nè potranno incontrarsi ancora, come volevamo dimostrare (*).

(*) Questa proprietà si può anche dedurre dalla prima definizione di linea retta, col metodo precedentemente adoperato, per dimostrare che due linee rette non possono coincidere per un tratto della loro lunghezza, e poi divergere.

Osservazione del Traduttore. Valendosi di questo metodo, osserveremo che, supposto che due rette s'incontrino in due punti A, B, se s'immagina di tagliare il piano secondo l'una o l'altra retta, e, levatane una parte, di capovolgerla, e adagiarla sull'altra, facendo

Per dimostrare la seconda proposizione, supponiamo che le rette AC e BD (fig. 19) giacciano in un piano, e, per quanto si concepiscano prolungate, non s'incontrino (nel

coincidere nei due orli i punti A e B, non potrà darsi che, in entrambi i casi, le due parti si adattino esattamente l'una all'altra, come vuole la definizione di linea retta (pag. 81). Infatti, la parte levata, in un caso, conterrà di più, o di meno, che nell'altro caso il pezzo di piano limitato dai tratti delle due rette compresi fra i punti A e B, e si adagierà sopra una parte, che conterrà questo pezzo rispettivamente di meno o di più che nel primo caso.

È importante di notare che con questa dimostrazione non si fa uso del secondo postulato; ma si riconoscerà facilmente che essa cadrebbe in difetto, quando si supponesse che la retta fosse una linea rientrante, nel qual caso i tratti delle due rette considerate compresi fra i punti A e B limiterebbero due pezzi complementari del piano; il lettore potrà convincersi di ciò, ripetendo il ragionamento, nell'ipotesi che la superficie considerata, anzi che un piano, sia quella di una sfera. Perciò la dimostrazione precedente regge, ammettendo che un punto, il quale scorra lungo una retta, camminando sempre nello stesso verso, non ritorni mai alla stessa posizione, ossia che la retta è una linea infinita, e, per conseguenza, che il piano è una superficie infinita, e che lo spazio è infinito. La proposizione che due rette non possono incontrarsi in più di un punto, senza coincidere, è quindi una conseguenza della nostra prima ipotesi, che le figure si possono trasportare nello spazio, senza alterarsi, e dell'ipotesi che lo spazio sia infinito, donde segue evidentemente che la superficie piana, e la linea retta saranno infinite.

La dimostrazione del testo mostra che dalle nostre due ipotesi fondamentali segue che la retta è una linea infinita, e quindi che lo spazio è infinito. Ma, dalla prima ipotesi, e da quella che lo spazio sia infinito non segue reciprocamente la proposizione che vi possono essere corpi della stessa forma, e di grandezza comunque diversa, che costituisce la nostra seconda ipotesi fondamentale. Quindi una geometria fondata su quelle due ipotesi converrà ad uno spazio, del quale il nostro rappresenta un caso particolare.

qual caso le diremo *parallele*), mentre la retta AB le incontra ambedue.

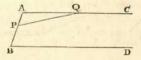
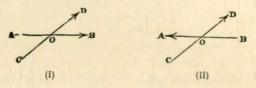



Fig. 19.

Facendo scorrere un punto P, lungo AB, da B verso A, e descrivendo per esso, in ogni sua posizione, una retta, la quale formi con BA lo stesso angolo che forma BD, la retta mobile non potrà incontrare AC, senza coincidere esattamente con essa. Difatti, ammesso, per un momento, che possa darsi il contrario, supponiamo che ciò avvenga, quando la retta mobile occupa la posizione PQ. In tal caso, si potrà descrivere per B una retta, la quale formi con AB e AC un triangolo della stessa forma del triangolo APQ. Ma perciò la retta descritta per B dovrà formare con AB lo stesso angolo che colla retta medesima forma PQ; cioè dovrà essere la retta BD. Ora, le tre rette BD, BA e AC non possono formare un triangolo, perchè, per supposto, BD e AC non s'incontrano mai. Per conseguenza un triangolo come APQ non vi può essere; ossia la retta PQ non potrà incontrare AC, senza coincidere con essa. D'altra parte, questa retta, in ogni sua posizione, forma con BA lo stesso angolo che con essa forma BC. Quindi, poichè, in una certa posizione, coincide con AC, AC deve formare con BA lo stesso angolo che con essa forma BC, ciò che volevamo

dimostrare. Questa è la famosa proposizione delle parallele (*).

(*) Due rette, che si tagliano, formano nel punto d'intersezione quattro angoli, a due a due eguali fra loro. Quindi, esse formano l'una coll'altra due angoli diversi, e capita spesso di doverli distinguere. Ciò si ottiene, intendendo che AB rappresenti la retta condotta

da A a B, e BA invece la retta condotta da B ad A, per modo che BOD sarà l'angolo compreso fra AB e CD (i), e DOA, l'angolo compreso fra BA e CD (ii).

Così, l'angolo formato da AC con BA, di cui si tratta nel testo, non è l'angolo CAB (generalmente diverso da DBA, come chiaramente si vede), ma CAE, rappresentando con E un punto del prolungamento di BA oltre A.

Nota dell'Autore.

Ammessa la nostra prima ipotesi fondamentale, e supposto lo spazio infinito, per modo che due rette distinte non possano incontrarsi in più di un punto (pag. 86. *Nota*), data una retta, e preso un punto fuori di essa, se per questo punto si descriverà una seconda retta, posta nello stesso piano della data, e tale che una terza retta, che le incontri ambedue, formi con esse angoli eguali, nel senso ora definito, questa retta non potrà incontrare la data. Difatti, per l'eguaglianza degli angoli alterni-interni, che in tal caso chiaramente si verifica, il pezzo di piano compreso fra la trasversale, e le parti delle due rette che giacciono da una banda di essa, levato e capovolto, si potrà adattare esattamente al pezzo analogo, compreso dalla trasversale, e dai prolungamenti delle due rette: per modo che, se le due rette si incontrassero da una parte della trasversale, dovrebbero incontrarsi anche dall'altra. Ma non segue dagli stessi

Dalla prima di queste due proposizioni si deduce che due triangoli, i quali hanno rispettivamente eguali un angolo, e i due lati che lo comprendono, sono eguali. Difatti, prendendo uno dei due triangoli, e adagiandolo sull'altro, in modo che gli angoli eguali coincidano, e i lati eguali si trovino dalla stessa parte di essi, i lati che li contengono in principio dovranno coincidere, e perciò non potranno in seguito divergere. Ora, siccome essi hanno in entrambi i triangoli la stessa lunghezza, le estremità di quelli che appartengono ad un triangolo cadranno sulle estremità di quelli che appartengono all'altro; quindi i due lati rimanenti dei due triangoli avranno gli estremi comuni; e, per conseguenza, dovranno coin-

postulati la proposizione reciproca; e perciò la retta in tal modo definita non sarà necessariamente la sola, che si potrà descrivere pel punto considerato, nel piano della retta data, in modo che non possa incontrarla.

La proposizione reciproca, per quanto abbiamo veduto, si verifica, ammettendo il postulato più particolare (pag. 87) che vi possano essere figure della stessa forma, e di grandezza comunque diversa. Quindi, dai nostri due postulati fondamentali segue che, data una retta, e un punto fuori di essa, per questo punto si potrà descrivere una retta, ed una sola, posta nello stesso piano della data, la quale non potrà incontrarla. È in questa forma che il teorema delle parallele suol essere enunciato.

La stessa proposizione si può enunciare anche sotto un'altra forma, dicendo che: se una retta, cadendo sopra due altre, forma gli angoli interni da una medesima parte la cui somma sia minore di due retti, quelle due, prolungate da questa parte, s'incontreranno. Questo è il celebre postulato d'Euclide.

Così la geometria fondata sui nostri postulati è quella di Euclide; e lo spazio al quale essa si applica è il così detto spazio euclideo.

Nota del Traduttore.

cidere, perchè diversamente due rette s'incontrerebbero in più di un punto. Così, un triangolo coprirà esattamente l'altro; ossia i due triangoli saranno eguali sotto ogni rapporto.

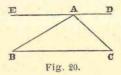
In modo analogo possiamo verificare che, se due triangoli hanno rispettivamente due angoli eguali, la loro forma è la stessa. Difatti, preso uno di essi, si potrà ingrandirlo, o impiccolirlo, finchè il lato che congiunge questi due angoli diventa eguale a quello che congiunge i due angoli corrispondenti dell'altro, senza alterarne per questo la forma; e perciò basterà dimostrare che la forma del triangolo così ottenuto sarà eguale a quella del secondo dei due triangoli dati. Ora, confrontando questi due triangoli, si vede che avranno due lati eguali, per costruzione, e gli angoli posti agli estremi di essi rispettivamente eguali, perchè sono eguali per supposto nei due triangoli primitivi, e si varia la grandezza d'uno di essi, senza alterarne gli angoli. Perciò si ricade sopra un caso precedentemente considerato, nel quale fu dimostrato che gli angoli rimanenti saranno parimente eguali, e concludiamo quindi che i due triangoli avranno la stessa forma.

Applicando queste proposizioni ad un solo triangolo, in vece che a due, troviamo che, se due de' suoi lati sono eguali, saranno eguali anche gli angoli opposti ad essi; e, reciprocamente, che se due angoli sono eguali, anche i lati ad essi opposti saranno fra loro eguali. Difatti, in ambedue i casi, il triangolo, capovolto, si potrà adattare esattamente alla sua primitiva posizione. Un triangolo di questa specie si chiama *isoscele.*

Dal teorema delle parallele, che abbiamo dedotto dal nostro secondo postulato sullo spazio, si ricava assai fa-

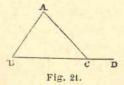
cilmente il teorema importantissimo, che i tre angoli di un triangolo, presi insieme, formano due angoli retti.

Difatti, se pel vertice A di un triangolo ABC (fig. 20) si descrive la retta DAE, che forma col lato AC lo stesso

Fig. 20.

angolo che, col medesimo lato, forma BC, questa retta, per quanto si è precedentemente dimostrato, non potrà incontrare BC, cioè sarà ad essa parallela. Per conseguenza, essa farà con AB lo stesso angolo che con esso forma BC (*); e da ciò si conchiude che i tre angoli ABC, BAC e BCA sono rispettivamente eguali agli angoli EAB, BAC, e CAD, i quali, presi insieme, formano due retti.

Questa proposizione si può anche enunciare in un'altra forma.

Prolungando i lati di un triangolo, si formano i cosi detti *angoli esterni*. Cosi, prolungando il lato BC dal triangolo ABC (fig. 21), oltre C, fino in D, si forma l'angolo esterno ACD del triangolo considerato; e i tre angoli in-

Fig. 21.

terni, ACB, CAB e ABC, si dicono, il primo, *adjacente*, e gli

(*) Si rammenti la convenzione della nota a pag. 88.

altri due, *opposti* all'angolo medesimo. È chiaro che, siccome ogni lato si può prolungare in due sensi, ogni triangolo presenta sei angoli esterni.

Ciò premesso, l'altra forma, che si può dare alla nostra proposizione, è che ogni angolo esterno di un triangolo è eguale alla somma dei due angoli interni opposti. Difatti, apparisce dalla figura che l'angolo esterno ACD, preso insieme con ACB, forma due retti: e, per conseguenza, dev'essere eguale alla somma dei due angoli, CBA e CAB, che formano egualmente due angoli retti, presi insieme collo stesso angolo ACB.

§ 7. *Proprietà dei circoli; circoli e triangoli corrispondenti.*

Di questa proposizione ci varremo per dimostrare una importante proprietà del circolo, e cioè, che, se si prendono due punti sulla circonferenza di un circolo, e si congiungono con un terzo punto di essa, l'angolo formato dalle due rette congiungenti dipenderà dai primi due punti, e non dal terzo. Si congiungano i due punti A, B (fig. 22) con C; dimostreremo che, dovunque sia posto C, sulla circonferenza, l'angolo ACB sarà sempre metà di AOB, essendo O il centro del circolo.

La retta CO, prolungata, incontri la circonferenza in D. Allora, poichè il triangolo OAC è isoscele, gli angoli OAC e OCA sono eguali, e, per la stessa ragione, sono eguali gli angoli OBC e OCB.

Ma, per ciò che fu testè dimostrato, l'angolo esterno AOD è eguale alla somma degli angoli OAC e OCA: e, poichè questi due angoli sono eguali, esso dev'essere il doppio

di ciascuno, per esempio, di OCA. Analogamente, l'angolo BOD è doppio di OCB, e, per conseguenza, AOB è doppio di ACB.

Difatti, AOB, nel caso della prima figura (i), è la somma, e in quello della seconda figura (ii), la differenza di due angoli, ciascuno dei quali è doppio di uno dei due angoli di cui, negli stessi casi, ACB è la somma o la differenza.

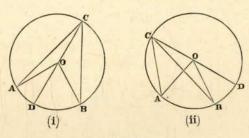



Fig. 22.

Poichè ACB è sempre metà di AOB, dovunque sia posto il punto C della circonferenza, in quello dei due segmenti in cui la retta AB divide il circolo, che si trova al disopra, si vede che la grandezza di questo angolo non dipende che dalla posizione di A e B, e punto da quella di C. Ma vediamo che cosa succede, se C cade nel segmento inferiore del circolo. Come prima, i triangoli OAC e OBC (fig. 23) sono isosceli, e gli angoli DOA e DOB sono rispettivamente doppii di OCA e OCB. Per conseguenza, l'angolo complessivo AOB, che si forma facendo rotare OA intorno ad O, finchè prende la posizione OB, attraverso la posizione OD (cioè nel senso in cui girano gl'indici dell'orologio), è doppio di ACB.

Per le nostre precedenti conclusioni, l'angolo ADB, formato congiungendo A e B con D, è metà dell'angolo AOB, che si genera facendo rotare OB verso OA, nel senso in cui girano gl'indici dell'orologio. La somma di questi due angoli, che noi abbiamo indicato entrambi con AOB, rappresenta una completa rotazione intorno al punto O, e perciò è quattro angoli retti. Quindi la somma di ADB e ACB,

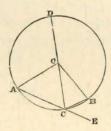



Fig. 23.

che sono rispettivamente la metà dei precedenti, è due angoli retti. In altre parole, gli angoli opposti di un quadrilatero i cui vertici si trovano sulla circonferenza di un circolo, presi insieme, formano due retti.

Supponendo che il punto C cada piuttosto nell'uno che nell'altro dei due segmenti in cui la retta AB divide il circolo, sembra che si arrivi a due proposizioni diverse; ma esse ne rappresentano sostanzialmente una sola, e si possono comprendere in un solo enunciato. Se, nell'ultima figura, si prolunga AC fino in E, gli angoli ACB e BCE formano due retti, e, per conseguenza, BCE è eguale a ADB. Ora BCE è l'angolo di cui si deve far rotare CB, nel senso in cui girano gl'indici dell'orologio, perchè la sua direzione

coincida con quella di AC; e questa stessa definizione si applica egualmente all'angolo ACB, nel caso della fig. 22, vale a dire nel caso che C cada nel segmento superiore; per modo che il teorema in discorso si può enunciare così: Se A e B sono due punti fissi della circonferenza di un circolo, e C un terzo punto di essa, l'angolo di cui deve rotare CB, nel senso in cui girano gl'indici dell'orologio, per coincidere con CA, o AC, secondo il caso, è eguale a metà dell'angolo di cui deve rotare OB, nel medesimo senso, per coincidere con OA.

Di ciò vogliamo valerci, per dimostrare un'altra proposizione interessante. Presi tre punti D, E, F (fig. 24) sui

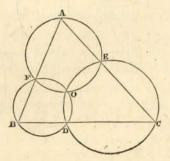



Fig. 24.

lati di un triangolo ABC, D sopra BC, E sopra CA, e F sopra AB, si potranno descrivere tre circoli passanti rispettivamente per AFE, BDF, CED. Ora, si può dimostrare che questi tre circoli s'incontreranno in uno stesso punto, O. Difatti, O rappresenti, in primo luogo, l'intersezione dei due circoli AFE e BFD; allora, gli angoli FAE e FOE formeranno due retti, e così gli angoli DOF e DBF. Ora i tre

angoli, che stanno intorno a o fanno quattro retti, e quelli del triangolo ABC ne fanno due; ma vediamo che, di questi sei angoli, due paja fanno ciascuno due retti; quindi, il rimanente pajo, cioè gli angoli DOE e DCE, faranno pure due retti. Apparisce da ciò che il circolo che passa pei punti C, E, D, passerà per O, e concludiamo che i tre circoli s' incontrano in uno stesso punto.

La posizione dei punti DEF non è soggetta ad alcuna restrizione (*); essi potranno prendersi così sui lati del

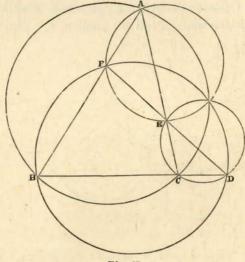



Fig. 25.

triangolo, come sui loro prolungamenti. In particolare,

(*) Se qualcuno dei punti D, E, F si prenderà sul prolungamento di un lato, la precedente dimostrazione non si potrà applicare alla lettera anche a questo caso, ma le necessarie modificazioni sono lievi ed ovvie.

possiamo supporre che giacciano sopra una quarta linea DEF, e allora abbiamo questo teorema: Prese quattro rette qualunque (fig. 25), una delle quali incontra il triangolo ABC, formato dalle altre, nei punti D, E, F, i circoli che passano pei punti AFE, BDF, CDE, s'incontrano in un punto.

Ora, nulla impedisce di considerare AFE come il triangolo formato da tre rette e DCB come la quarta retta che ne sega i lati, di cui si tratta nella proposizione testè enunciata. Perciò segue dalla stessa proposizione che i circoli passanti per ABC, ECD, FBD, s'incontreranno in un punto. Questo dev'essere lo stesso punto di prima, perchè due circoli sono ancora gli stessi; concludiamo quindi che tutti quattro i circoli s'incontreranno in uno stesso punto, ed enunciamo la seguente proposizione:

Date quattro rette, prendendone tre per volta, si potranno formare con esse quattro triangoli; i circoli circoscritti a questi quattro triangoli s'incontrano in un punto.

Questa proposizione è la terza di un'intera serie.

Due linee rette determinano un punto: il loro punto d'intersezione.

Tre linee rette danno luogo a tre punti d'intersezione, e queste tre punti determinano un circolo: il circolo circoscritto al triangolo formato delle tre rette.

Quattro linee rette determinano, lasciandone fuori una per volta, quattro gruppi di tre; e i quattro circoli corrispondenti a questi gruppi s'incontrano in un punto.

Analogamente, cinque rette determinano cinque gruppi di quattro, ciascuno dei quali, per la precedente proposizione, dà origine ad un punto. Ora fu dimostrato da Miquel che questi cinque punti giacciono sopra uno stesso circolo.

Si dimostra (*) che questa serie di termini è illimitata. Sei rette, lasciandone fuori una per volta, determinano sei gruppi di cinque, a ciascuno dei quali, pel teorema di Miquel, corrisponde un circolo. Questi sei circoli s'incontrano in un punto, e via discorrendo. Un numero pari ($2n$) di rette determina un punto, come intersezione di un egual numero di circoli. Prendendo una retta di più, il numero dispari $2n + 1$ determina altrettanti gruppi di $2n$ rette, a ciascuno dei quali corrisponde un punto; ora, questi $2n + 1$ punto giacciono sopra uno stesso circolo.

§ 8. *Le sezioni coniche.*

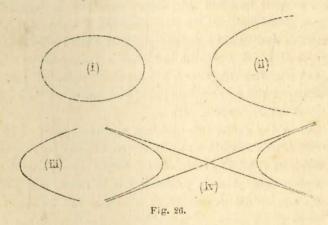
L'ombra, che un circolo, posto fra un punto luminoso, e una superficie piana, getta su questa superficie, può presentare, a seconda del caso, tre forme diverse. Corrispondono a queste forme tre diverse specie di curve, celebri nella storia della matematica, le quali, in geometria, e nelle sue applicazioni, sostengono una parte della più grande importanza. Le linee che abbiamo finora considerato, cioè la retta, e il circolo, sono casi speciali di queste curve; ed ora gioverà indagare alcune proprietà dei tipi più generali.

Tenendo un disco circolare, in qualsivoglia posizione, tutto quanto al di sotto della fiamma di un lume, e ricevendone l'ombra sulla tavola, quest'ombra presenterà una forma ovale, eccetto che in due casi estremi, nell'uno dei quali sarà un circolo, mentre nell'altro sarà una retta. Il primo caso si verificherà, tenendo il disco parallelo alla

(*) La dimostrazione fu data dallo stesso Clifford nell'*Oxford, Cambridge and Dublin Messenger of Mathematics*, vol. V, pag. 124. Vedansi i suoi *Mathematical Papers*, pag. 51-54.

tavola; il secondo, presentandolo alla fiamma per l'orlo, ossia tenendolo in modo che il piano in cui giace passi pel punto luminoso. Il contorno ovale, che, eccettuati questi due casi, presenta l'ombra in discorso, è un'*ellisse* (i). Curve di questo tipo sono le trajettorie descritte dai pianeti intorno al sole.

Tenendo invece lo stesso disco in modo che il suo punto più elevato giunga a livello della fiamma, l'ombra presenterà, come prima, un' estremità ovale, verso il lume; ma i suoi due lati, invece di riunirsi, per formare una seconda estremità ovale, andranno sempre più scostandosi, tendendo tuttavia a diventare sempre più sensibilmente paralleli. Il contorno dell' ombra, in questo caso, è una *parabola* (ii). Le orbite di molte comete, e la trajettoria descritta da un sasso lanciato obliquamente in alto, presentano assai prossimamente questa forma; e questa tra-

Fig. 26.

jettoria sarebbe esattamente una parabola, se il moto del sasso non fosse ritardato dall'atmosfera.

Finalmente, tenendo il disco circolare ancora più in alto, per modo che un piano orizzontale a livello della fiamma lo divida in due parti, soltanto una parte getterà ombra sulla tavola, e il contorno di essa sarà una curva della forma che rappresenta l'annessa figura, i cui due lati andranno scostandosi l'uno dall'altro in direzioni costantemente diverse, e perciò non tenderanno, come nel caso della parabola, a diventare paralleli (iii).

Ma se questa curva sarà tutta l'ombra del contorno per la fisica, non lo è parimenti per la geometria.

Noi possiamo anche supporre che la curva in discorso si ottenga, congiungendo il punto luminoso coi punti del contorno del disco, per mezzo di altrettante rette, e prolungando queste rette, fino ad incontrare la tavola.

Questa costruzione puramente geometrica si può applicare anche alla parte del circolo superiore al livello della fiamma, sebbene essa non getti ombra sulla tavola. Congiungendo questi punti del circolo colla fiamma, e prolungando dietro di esse le rette congiungenti, esse incontreranno la tavola dalla parte opposta del lume, e disegneranno una curva perfettamente eguale e similmente posta all'ombra fisica (iv), che potrà chiamarsi l'*anti-ombra*, o l'*ombra geometrica* del circolo.

Queste due curve, in geometria, vogliono essere considerati come due rami di una stessa curva; e la curva così formata si chiama *iperbola*. Due rette poste nel piano dell'iperbola possiedono la proprietà che la curva vi si accosta sempre più quanto più si allontana dal loro punto d'intersezione, senza mai incontrarle; e, per questa ragione, si chiamano *asintoti*, con termine derivato dal greco, che significa « non coincidenti. » Esse sono parallele alle due

rette, che congiungono il punto luminoso coi due punti del circolo posti allo stesso livello.

Abbiamo già avuto occasione di vedere come una linea, movendosi, generi una superficie. Alla superficie generata da una retta, che si move passando sempre per un punto fisso, si dà il nome di *cono;* e il punto fisso si chiama il *vertice* del cono. Le tre curve, che abbiamo ora definito, si chiamano *sezioni coniche*, perchè si possono ottenere, segando un cono con un piano.

Osserviamo che l'ombra del circolo, di cui ci siamo valsi per definirle, si forma realmente così. Difatti, è chiaro che tutte le rette che congiungono la fiamma coi singoli punti del contorno del disco circolare formano un cono, di cui la fiamma è il vertice, e il circolo la base. Queste rette si devono concepire prolungate indefinitamente oltre la fiamma; e si otterrà così ciò che volgarmente si direbbe una coppia di coni riuniti pel vertice, e, con termine geometrico, si chiama una *superficie conica* a due *falde*. Ora, l'ombra del circolo è la sezione di questa superficie, fatta dal piano della tavola; la falda su cui si trova il circolo fornisce l'ombra propriamente detta: l'altra, supposto che il piano segante l'incontri, ciò che abbiamo chiamato l'ombra geometrica.

Sulla considerazione delle ombre si fonda un metodo di ricerca, molto adoperato dai geometri, col quale si trae partito dalla circostanza, che certe proprietà geometriche sono necessariamente comuni ad una figura e alla sua ombra. Così, per esempio, se due linee che si segano s'immaginano tracciate sopra una lastra di vetro, posta la lastra fra la fiamma d'un lume, e la tavola, le ombre da esse projettate sulla tavola si segheranno anch'esse.

L'ombra d'una retta è sempre una retta. Difatti, i raggi luminosi mandati da una fiamma ai diversi punti di una retta giacciono evidentemente in un piano, il quale incontra quello della tavola secondo una certa retta; poichè questa interserzione è l'ombra projettata dalla retta sulla tavola, si vede che essa è parimente una retta.

Riunendo questa proposizione colla precedente, se ne deduce che una curva e la sua ombra saranno sempre segate da una retta in un egual numero di punti.

Quindi, poichè una retta sega un circolo in due punti, o non lo sega, le ombre del circolo presenteranne la stessa proprietà: una retta, o non le segherá, o le segherá in due punti.

Quando una retta tocca un circolo, i due punti d'intersezione si fondono in uno solo. Per quanto precede, avverrà lo stesso, quando una retta tocca un'ombra del circolo.

Così pure, da un punto esterno si possono condurre due tangenti ad un circolo; quindi, da un punto esterno si potranno condurre due tangenti ad una qualsiasi delle tre curve poc'anzi definite. Invece, da un punto interno, non si può descrivere ad un circolo alcuna tangente; e perciò da un punto interno non si potrà descrivere alcuna tangente ad una sezione conica qualsivoglia.

Questo metodo, mediante il quale le proprietà di una curva si deducono da quelle di un'altra, di cui la curva considerata è un'ombra, si chiama il metodo della *projezione.*

La specie di projezione di cui si fa maggiormente uso corrisponde all'ipotesi che il punto luminoso si trovi ad una distanza, che si può immaginare superiore ad ogni limite. Supponiamo, per esempio, che l'ombra di un circolo, tenuto obliquamente, sia prodotta da una stella, posta

al zenit, tanto lontano, da potersi considerare come a distanza infinita. Le rette che la congiungono coi diversi punti del circolo saranno tutte verticali; e perciò formeranno, non un cono, come nel caso generale, ma un cilindro. Perciò, questa specie di projezione presenta parecchi vantaggi, fra cui si può citare come uno dei principali quello che le ombre di due rette parallele sono rette egualmente parallele: ciò che non si verifica generalmente, con una projezione d'altra specie. L'ombra del circolo, nel nostro caso, è sempre un'ellisse; e varie proprietà molto importanti di questa curva si possono trovare, con questo metodo, deducendole da proprietà del circolo, che, in gran parte, per la simmetria della figura, si riconoscono a colpo d'occhio.

Così, supposto che il nostro circolo sia tenuto verticale, è evidente, per la simmetria della figura, che il diametro verticale dividerà per metà tutte le rette orizzontali terminate alla periferia del circolo; ora, le tangenti al circolo nelle sue estremità saranno orizzontali; e perciò ogni diametro d'un circolo divide per metà tutte le corde parallele alle tangenti al circolo nelle sue estremità. Supposto che l'ombra di questa figura sia prodotta da una stella infinitamente lontana (che non dobbiamo più supporre esattamente al zenit, perchè, in tal caso, l'ombra del circolo si ridurrebbe ad una retta), il punto di mezzo dell'ombra d'ogni retta sarà l'ombra del punto di mezzo della retta; e noi vediamo così che, nell'ellisse, una retta, che congiunge i punti di contatto di due tangenti parallele, divide per metà tutte le corde parallele alle tangenti medesime.

Ogni retta così definita si chiama, come nel caso del

circolo, un *diametro*. Poichè l'ombra di ogni diametro del circolo è un diametro dell'ellisse, tutti i diametri dell'ellisse passeranno per uno stesso punto, che sarà l'ombra del centro del circolo. Questa comune intersezione di tutti i diametri, come nel circolo, anche nell'ellisse, si chiama il *centro*.

Per la stessa ragione della simmetria, il diametro orizzontale del nostro circolo dividerà per metà tutte le corde verticali; e perciò, se un diametro divide per metà le corde parallele ad un altro, questo divide per metà le corde parallele al primo. Ricorrendo alla projezione, riconosceremo subito che la stessa proposizione si applica all'ellisse.

Due diametri che presentano questa relazione si dicono *conjugati*. Notiamo che, nel caso dell'ellisse, diversamente da quello del circolo, non saranno generalmente perpendicolari fra loro.

Poichè l'ombra di un circolo prodotta da un punto infinitamente lontano è sempre un'ellisse, non potremo ottenere collo stesso metodo le proprietà dell'iperbola. Tuttavia, si trova, valendosi di metodi opportuni, che quelle proposizioni, che noi abbiamo dimostrato per l'ellisse, stanno anche per l'iperbola.

Una notevole differenza, che presentano le due curve, è questa, che il centro dell'ellisse è interno alla curva, mentre quello dell'iperbola cade fuori di essa. Perciò, mentre tutte le rette condotte pel centro incontrano l'ellisse, soltanto alcune incontrano l'iperbola. In particolare, di ogni coppia di diametri conjugati dell'iperbola, uno incontra la curva, e l'altro no; ciò che non toglie però che ciascuno di essi divida per metà tutte le corde parallele all'altro.

§ 9. *Sulle superficie del secondo ordine.*

Così, ci siamo, in primo luogo, occupati della più semplice delle linee, e della più semplice della superficie, la linea retta, e la superficie piana; e abbiamo quindi trovato alcune proprietà di quattro diverse linee curve: il circolo, l'ellisse, la parabola e l'iperbola. Ora vogliamo considerare alcune superficie curve; e, prima di tutte, la superficie analoga al circolo, cioè la *sfera*, definita, come il circolo, dalla proprietà che tutti i suoi punti si trovano alla stessa distanza dal centro.

Il problema più importante, che presenta lo studio di una superficie, è forse la ricerca delle linee, secondo cui essa è incontrata da altre superficie: specialmente nell'ipotesi che queste siano piane. Ora, quando un piano sega una sfera, la sezione, come facilmente si può dimostrare, è un circolo. Supposto che il piano si mova, in modo che la sua distanza dal centro vada sempre crescendo, questo circolo diventerà sempre più piccolo, finchè si ridurrà ad un punto. In tal caso, si dice che il piano *tocca* la sfera; e si presenta il fatto, ovvio finchè si vuole, ma importante, che la sfera si trova tutta da una stessa parte del piano. Seguitando a muovere il piano, per poco che cresca ancora la sua distanza dal centro, esso cesserà completamente dall'incontrare la sfera.

Preso un punto fuori d'una sfera, si possono condurre infiniti piani, che passano per quel punto, e toccano la sfera; i punti di contatto giacciono sopra un circolo. Perciò si potrà descrivere un cono, che abbia lo stesso punto per vertice, e tocchi la sfera secondo quel circolo. Esso

si chiama il *cono tangente* del punto. È chiaro che un cono tangente non si potrà descrivere parimente da un punto interno.

Proprietà affatto simili presentano certe altre superficie, che, come la sfera, non possono essere incontrate da una retta in più di *due* punti, e si chiamano, per questa ragione, superficie del *secondo ordine*.

Nello stesso modo che si può immaginare di dedurre l'ellisse da un circolo, stirandolo in una certa direzione, da una sfera si può ricavare uno *sferoide*, stirandola, oppure schiacciandola, in modo da formare qualcosa di simile ad un uovo, nel primo caso, e, nel secondo, ad un'arancia. Queste due specie di superficie sono ambedue simmetriche per rispetto ad uno dei loro diametri, ma non così per rispetto a tutti. Se lo sferoide presenta la figura d'un'arancia, ossia quella della terra, il diametro terminato ai due poli è più breve di quelli che giacciono nel piano dell'equatore, e questi sono tutti fra loro eguali. Invece, se presenta la figura d'un uovo, i diametri che giacciono nel piano dell'equatore sono tutti fra loro eguali, come nel caso precedente, ma quello che termina ai due poli è più lungo di tutti.

Preso l'uovo, o l'arancia, se il circolo, che ne forma l'equatore, si ridurrà un'ellisse, stirandolo in un senso, e schiacciandolo nell'altro, per modo da ottenere una superficie con tre diametri perpendicolari fra loro tutti di diversa lunghezza, questa superficie sarà ciò che si chiama un *ellissoide*. L'ellissoide, nella geometria della superficie, sostiene la stessa parte, che l'ellisse, in quella delle curve. Come le sezioni della sfera fatte con un piano sono circoli, quelle dell'ellissoide sono ellissi. Veramente, il piano

si può condurre in modo che la sezione sia un circolo; ma il circolo vuol essere considerato come un caso particolare dell'ellisse: cioè come un'ellisse i cui due assi sono eguali. Così pure, come abbiamo veduto verificarsi per la sfera, per un punto esterno all'ellissoide si possono condurre infiniti piani che lo toccano; i punti di contatto, in questo caso, giacciono sopra un'ellisse; e si potrà descrivere un cono, che abbia lo stesso punto per vertice, e tocchi l'ellissoide secondo questa ellisse. Finalmente, l'ellissoide ha comune colla sfera anche la proprietà, che, quando è toccato da un piano, giace tutto da una stessa parte di esso.

Altre superficie presentano coll'iperbola, e colla para-

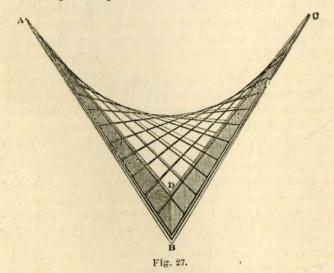



Fig. 27.

bola, relazioni analoghe a quelle che la sfera presenta col circolo, e l'ellissoide, coll'ellisse. Ci occuperemo di una di esse, che possiede molte notevoli proprietà.

Prendiamo un cartoncino in forma di rombo, ABCD (fig. 27), e tagliamolo secondo una diagonale, BD, fino a metà della grossezza, per modo che i due triangoli, ABD, CBD, in cui è diviso da questa diagonale, possano girare intorno ad essa. Facciamo quindi lungo ognuno dei quattro lati un numero eguale di fori equidistanti; e congiungiamo a due a due i fori corrispondenti di ogni coppia di lati opposti, per mezzo di fili di seta paralleli agli altri due lati. Piegando il cartoncino intorno alla diagonale BD, e tendendo i fili, questi formeranno una rete, il cui aspetto, come apparisce dalla fig. 27, richiamerà una sella, o un valico di montagna (*).

(*) Gioverà che il lettore si fabbrichi il modellino descritto dal testo. Perciò, preparato il cartoncino, come insegna il testo, farà passare per ogni coppia di fori corrispondenti un filo di seta di conveniente lunghezza, e riunirà in un mazzo tutti i capi, che escono da ciascuna parte dell'incisione secondo cui il cartoncino si piega. Presa allora con una mano uno di questi due mazzi, e coll'altra la punta posta dalla stessa parte dell'incisione, tirerà la punta e il mazzo in direzioni opposte, finchè il nodo dell'altro mazzo si ridurrà a contatto del cartoncino: per modo che, seguitando a tirare, l'obbligherà a piegarsi, mentre tutti i fili si manterranno distesi.

A questo modo, si potrà piegare il cartoncino, finchè poco mancherà che i due triangoli, in cui è diviso dall'incisione, non si applichino l'uno all'altro. Ad ogni grado di piegamento corrisponderà una superficie della specie considerata di una forma particolare, le cui sezioni principali saranno tanto più incurvate, quanto più il cartoncino sarà piegato. Si otterrà così una famiglia di superficie di quella specie; o, per meglio dire, si vedrà il piano formato da due serie di fili paralleli a due direzioni trasformarsi in una super ficie di quella specie, e questa superficie deformarsi continuamente, finchè si ridurrà di nuovo ad una figura piana, e cioè alla regione di un piano esterna ad una certa parabola, a cui i fili dell'uno e dell'altro sistema saranno tutti tangenti.

La superficie in discorso si chiama *paraboloide iperbolico*.

Nota del Traduttore.

La superficie rappresentata dalla rete è interamente composta di linee rette; e queste formano due distinti sistemi, che corrispondono alle due serie di fili, originariamente paralleli alle due coppie di lati del rombo.

Segando la superficie con un piano passante per AC, e pel punto di mezzo di BD, la sezione è una parabola colla concavità rivolta in alto. Segandola invece con un piano passante per BD, e pel punto di mezzo di AC, la sezione è una parabola colla concavità rivolta in basso; e il vertice comune delle due parabole forma il punto culminante del valico.

Il piano tangente in questo punto sega la superficie secondo due rette, e parte della superficie si trova al di sotto di esso, parte al di sopra. Esso può paragonarsi al piano orizzontale, che segna il livello della cima di un valico: del quale, se si attraversa il valico, si resta al di sotto finchè si sale da una parte, e si torna al di sotto, tosto che, superata la cima, si comincia a scendere dall'altra: mentre, se si discende dalla montagna a destra, per salire nuovamente a sinistra, se ne sta sempre al di sopra. Segando la superficie con un piano orizzontale superiore per poco che sia a questo piano tangente, la sezione è un'iperbola, i cui asintoti sono paralleli alle due rette, che formano la sua intersezione colla superficie. Un'iperbola cogli asintoti paralleli a queste due rette è parimente la sezione fatta con un piano orizzontale per poco che sia inferiore al piano tangente medesimo; se non che, in questo caso, i due rami della curva sono posti nell'altra coppia di angoli opposti formati dagli asintoti. Perciò, se s'immagina che il piano segante, partendo da una certa posizione superiore a quella del piano tangente

considerato, vada poi continuamente abbassandosi (restando sempre orizzontale), si vedranno i due rami dell'iperbola, che forma l' intersezione del piano colla superficie, avvicinarsi sempre più, secondo una certa direzione, e sempre più inflettersi, finchè si toccheranno, e non formeranno più che due rette in croce. Seguitando ad abbassare il piano, gli angoli formati dalle due rette si staccheranno in direzione normale alla precedente; in pari tempo si arrotonderanno; e si produrrà la seconda specie d' iperbole.

Ciò ne induce a considerare una coppia di rette che si segano, come un caso particolare d'un' iperbola, e a concepire questa curva come dedotta dalle due rette, staccandole al loro punto d' intersezione, e arrotondando gli angoli da esse formati.

§ 10. *Come si possano formare curve del terzo ordine e di ordini superiori.*

Il metodo, col quale, nel precedente paragrafo, abbiamo immaginato di dedurre l'iperbola da una coppia di rette che si segano, permette, in generale, di ricavare nuove specie di curve da una combinazione di linee note.

Con termine, che potrà parere paradossale, ma che tuttavia si è trovato utile di adottare, la retta, per la ragione che da un' altra retta non è incontrata che in un solo punto, si chiama una curva del primo ordine; mentre una coppia di rette si chiama una curva del secondo ordine, per la ragione analoga che da una retta può essere incontrata in due punti, e non in più di due. Per questa medesima ragione, si chiamano curve del secondo ordine

anche il circolo, e le sue ombre, l'ellisse, la parabola, e l'iperbola; e, per quanto abbiamo precedentemente veduto, per mezzo dell'arrotondamento degli angoli, e della projezione, tutte queste curve si possono dedurre da una coppia di rette.

Un processo analogo ci permette di formare delle curve del terzo ordine. Una retta e un'ellisse, insieme accoppiate, costituiscono una linea del terzo ordine. Supposto che le due linee si seghino, arrotondando gli angoli da esse formate ai loro punti d'intersezione (fig. 28), si otterrà una curva del medesimo ordine, consistente di un'ovale e di un ramo sinuoso, detto « serpentino. » Ora, nel modo stesso che il circolo secondo il quale un piano sega una sfera, spostando il piano in modo che cresca conti-

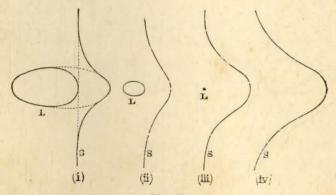



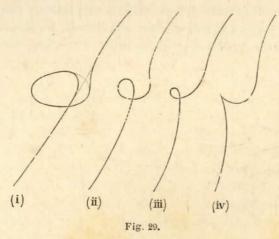
Fig. 28.

(i) Ovale completa e serpentino.
(ii) Ovale contratta e serpentino.
(iii) L'ovale si è ridotta ad un punto.
(iv) La linea ridotta al solo serpentino.

nuamente la sua distanza dal centro, si ristringe, finchè si riduce ad un punto, e finalmente scomparisce, la curva così ottenuta si potrà variare, facendo ristringere l'ovale,

che concorre a formarla, finchè si riduce ad un punto, e poi scomparisce del tutto, non rimanendo più che il serpentino, mentre questo non si potrà analogamente sopprimere.

Arrotondando gli angoli ad uno solo dei due punti d'intersezione dell'ellisse e della retta, invece che ad ambedue, si otterrà una curva del terzo ordine che taglia sè stessa, presentando un *nodo*, o *punto doppio* (fig. 29); e da essa, supponendo che il nodo vada contraendosi, finchè si riduce ad un punto, si dedurrà una curva con una punta, o *cuspide*.

Fig. 29.

Newton dimostrò che da queste cinque specie di curve, cioè la curva composta d'un'ovale e d'un serpentino, quella composta da un punto e da un serpentino, quella consistente di un semplice serpentino, quella con un nodo e quella con una cuspide, si possono dedurre per projezione tutte quante le curve del terzo ordine.

In modo analogo, accoppiando insieme due ellissi, si formeranno delle curve del quarto ordine. Supposto che esse si taglino in quattro punti, arrotondando tutti gli angoli, si potranno formare, a seconda del caso, due diverse specie di curve: cioè quattro ovali tutte esterne le une alle altre, e un'ovale con quattro depressioni, che ne abbraccia una seconda (fig. 30).

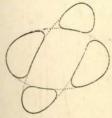
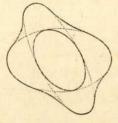
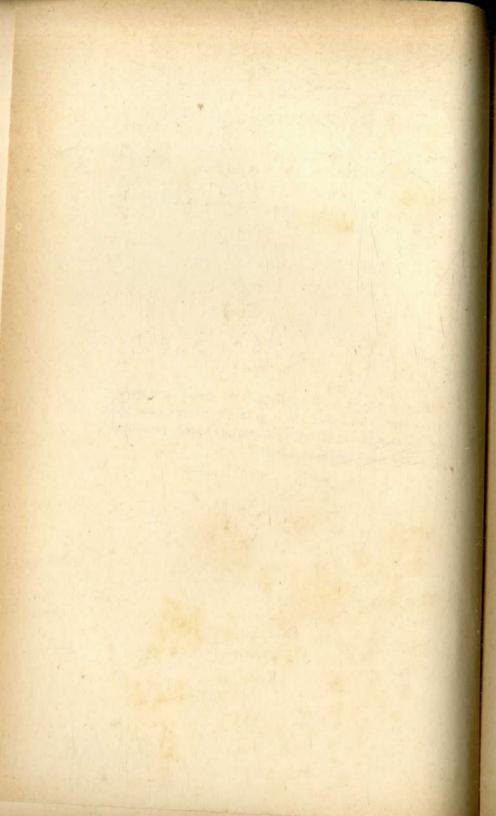



Fig. 30.

Se non che le varie specie di linee del quarto ordine sono tante numerose, che non furono ancora completamente classificate. E forme più svariate ancora presentano le curve degli ordini superiori.

CAPITOLO III.

QUANTITÀ

—

§ 1. *Misura delle quantità.*

In principio al nostro capitolo sul Numero ci siamo occupati dell'operazione, che consiste nel contare cose per loro natura separate l'una dall'altra, come sarebbero delle lettere, delle persone, o delle pecore; e abbiam veduto che una proprietà fondamentale di questa operazione è che conduce sempre allo stesso risultato, qualunque sia l'ordine in cui si prendono le cose considerate; o in altre parole, che a qualunque stadio dell'operazione, si può prendere indifferentemente una qualsivoglia di esse.

Parimente si possono contare cose non separate l'una dall'altra, ma formanti un sol pezzo. Così, per esempio, si dice che una camera è larga tanti metri, poniamo sei: e i metri, che contiene la sua larghezza, si possono contare, prendendo un regolo lungo un metro, e misurandone uno, a partire dal muro, quindi un altro, a partire dal punto dove finisce il primo, e così via, finchè si arriva alla parete opposta. Ora, una volta segnati tutti questi

metri, si potranno contare, come ogn'altra specie di cose separate, prendendoli in un ordine qualsivoglia; e, in ogni caso, il loro numero risulterà sei.

Ma questa operazione si potrá variare anche in un altro modo. Presa un'asta di lunghezza eguale alla larghezza della camera, si potrá tagliare da essa un metro, in una parte qualsiasi, e riunire i pezzi rimanenti: quindi tagliare un altro metro, parimente in una parte qualsiasí, dall'asta cosi formata, e di nuovo riunire i pezzi rimanenti, e cosi via. Supposto che questa operazione si ripeta cinque volte, gli ultimi due pezzi, riuniti insieme, formeranno, in ogni caso, un metro. Perciò, quando si contano cose riunite in un pezzo, come i metri che formano la lunghezza di un'asta, o la larghezza di una camera, oltre l'ordine in cui si prendono, è indifferente la posizione che ciascuna di esse occupa nel pezzo.

Cosi, quando si dice che un pacco di thè ne contiene un chilogrammo, ossia dieci ettogrammi, s'intende che, levandone un ettogrammo qualsivoglia, poi un altro parimente qualsivoglia da ciò che resta, e cosi via, quando se ne saranno levati nove, ciò che avanzerá sará sempre un ettogrammo.

E, se io dico che ho scritto per quindici minuti, sebbene, coll'orologio alla mano, non si sará potuto contare questi minuti altrimenti che nell'ordine in cui si sono successi, ciò non toglie che, se durante lo stesso intervallo di tempo, si saranno notati quattordici minuti separati, in un modo qualsiasi, il resto, formato dai loro intervalli, sará sempre un minuto.

In tutti questi casi noi contiamo cose formanti un sol pezzo. E si vede che possiamo scegliere ad arbitrio le

stesse cose che contiamo, nonchè l'ordine in cui le prendiamo per contarle, senza alterare il risultato.

In ciò consiste l'operazione, che si chiama *misura di una quantità*.

Ora, supponiamo che, misurando la larghezza di una camera, si trovi che non è esattamente sei metri, come abbiamo precedentemente supposto, ma sei metri e qualche cosa di più. In tal caso, potrà essere sei metri e cinquanta centimetri; e allora, per misurare questo qualche cosa di più, non si farà che ripetere la stessa operazione di prima: colla sola differenza che, invece di contare dei metri, si conteranno dei centimetri, lunghezze minori di un metro. Se la larghezza della camera non risultasse neppure un numero esatto di centimetri, ma oltre i cinquanta centimetri avanzasse qualcosa, questo avanzo si potrà parimente misurare in millimetri; così potranno avanzare venticinque millimetri. Ma l'operazione potrà non essere ancora finita; perchè potrà darsi che la larghezza della camera non contenga neppure un numero esatto di millimetri. Tuttavia si può osservare che a nessuno occorrerà mai di conoscere la larghezza di una camera più esattamente che a meno di un millimetro.

Parimente potrà darsi che un pacco di thè risulti prossimamente dieci ettogrammi, ma non esattamente, per modo che avanzi qualcosa. L'avanzo si potrà misurare in grammi; e in tal caso si conteranno, come prima, cose formanti un sol pezzo: soltanto che, invece di ettogrammi, saranno grammi, quantità più piccole di un ettogrammo. Il paccò di thè potrà non contenere neppure un numero esatto di grammi; ma a nessuno occorrerà mai di conoscere il peso di un pacco di thè esattamente fino ad un grammo.

Così pure nel caso del tempo: Un periodo geologico s'indicherà, con tutta la precisione desiderabile, in centinaja di secoli, la durata di una guerra, in anni, l'ora a cui parte un convoglio, a meno di un minuto, l'istante in cui comincierà un eclisse, a meno di un secondo: bastando, in ogni caso, che la misura sia abbastanza precisa per lo scopo che si ha di mira, e nulla più.

In conclusione, per misurare le quantità, si adopera comunemente un metodo grossolano, o approssimato, il quale consiste nell'indicare quante volte la quantità considerata contiene un certo campione, trascurando tutto ciò che avanza. Quest'operazione è tanto più rigorosa quanto più piccolo è il campione che si adopera, ma, in generale, non fornisce niente di più che un'approssimazione.

Allora, quando ci occorrerà il valore esatto di una quantità, poichè non ci basterà un valore approssimato, che cosa faremo? Dal momento che questo valore non si può definire esattamente a parole, non potremo fare altrimenti che servirci della quantità stessa, o di qualche altra quantità che la rappresenti. Per esempio, per rappresentare esattamente la lunghezza, e la larghezza di una camera, descriveremo due rette in una certa scala, poniamo nella scala di un centimetro ad un metro, e su queste due rette faremo i nostri ragionamenti.

Così, una lunghezza si rappresenta per mezzo di un'altra; ma non è parimente necessario, per rappresentare un peso, o un tempo, di adoperare un altro peso, od un altro tempo; praticamente, anche in questi due casi, si ricorre ad una lunghezza.

Quando un chimico eseguisce con tutta cura una pesata, raggiunto che abbia la maggior approssimazione possibile,

coll'aggiungere ad un piatto della bilancia i pezzi numerati, riduce il giogo alla posizione normale, appendendovi, alla debita distanza dal coltello, un leggiero romano, o cavaliere: e quella distanza indica il peso che avanza. Supposto che la bilancia sia assolutamente giusta, e che si possa trascurare l'attrito, e ogn' altra causa d'errore, il peso riesce così rappresentato con esattezza perfetta; e ciò che lo rappresenta è una lunghezza: la distanza del romano dal coltello.

Il tempo si determina ordinariamente per mezzo dell'orologio. Negli orologi comuni, l'indice dei minuti si muove a scatti; e se, per esempio, scatta due volte al secondo, l'orologio non dà che i mezzi secondi, e non può servire per intervalli più piccoli. Ma si potrà facilmente immaginare un orologio, nel quale il moto dell'indice dei minuti sia continuo; e, in tal caso, l'arco del quadrante compreso fra il suo punto più elevato e la punta dell'indice dei minuti, rappresenterà rigorosamente l'intervallo di tempo decorso dopo l'ultima ora. Giova notare che anche in questo caso, come nel precedente, la quantità rappresentata da una lunghezza non sarà generalmente tutta intera la quantità che si tratta di misurare, ma soltanto ciò che avanza, dopo che la maggior parte di essa si è valutata per mezzo di un campione.

Così, pesi e tempi, e lo stesso dicesi d'ogn'altra specie di quantità, si possono rappresentare per mezzo di rette di determinata lunghezza. Quindi potremo intendere che una lunghezza rappresenti una quantità qualsivoglia; e perciò d'or in avanti non parleremo che di questa specie di quantità (*).

(*) Cfr. Clifford. *Instruments used in meausurement.* (*Mathem Papers*, pag. 419). *Nota del Traduttore.*

§ 2. *Addizione e sottrazione delle quantità.*

Per sommare due lunghezze, è chiaro che basta disporle l'una sul prolungamento dell'altra. Notiamo come si verifichi il fatto analogo a quello che abbiamo osservato, quando si trattava di contare le quantità, che due quantità si potranno sommare in modi assai più svariati che non due numeri. Difatti, le due lunghezze si potranno spezzare in un certo numero di parti, e le diverse parti dell'una si potranno innestare dovunque si voglia nell'altra, senza alterare il risultato.

La natura della somma di due quantità si vedrà forse ancora più chiaramente, ricorrendo all'idea di « passo. » Supponiamo che sopra una retta, a partire da un certo punto, considerato come origine, sia segnata una serie di punti equidistanti, contrassegnati coi numeri 1, 2, 3, 4,... In tal caso, ogni numero particolare si potrà indicare per mezzo di un indice, facendolo scorrere lungo la retta, finchè segni il punto giusto; e, per aggiungervi, o sottrarne, un altro qualunque, basterà spostare l'indice, innanzi o indietro, pel numero corrispondente di divisioni. In modo analogo rappresenteremo le lunghezze; ma in questo caso non saremo più obbligati a fermarci ad una divisione della scala. Ogni lunghezza si rappresenterà, riducendo l'indice al punto la cui distanza dall'origine è misurata dalla lunghezza considerata, il quale potrà cadere dovunque fra due punti che corrispondono a due numeri consecutivi; e, per aggiungervi, o sottrarne, un'altra lunghezza, si farà fare all'indice un « passo » avanti o indietro, della necessaria grandezza.

Si vede immediatamente che, nel caso di quantità qualunque, non altrimenti che in quello dei numeri, l'ordine in cui si succedono i passi non influisce sul risultato.

§ 3. *Moltiplicazione e divisione delle quantità.*

Abbiamo già avuto occasione di considerare qualche caso in cui una quantità *si moltiplica:* cioè, in cui si somma un certo numero di quantità tutte eguali ad una stessa, operazione che si chiama *moltiplicare* questa quantità per quel numero. Così, la lunghezza di sei metri è il risultato che si ottiene moltiplicando un metro per sei.

Ora, possiamo invertire il quesito, e domandare: Date due lunghezze, per qual numero si deve moltiplicare una di esse, per ottenere l'altra? È implicito in quanto fu detto intorno alla misura delle quantità che questo numero non si potrà trovare che in certi casi particolari. Per esempio, non si potrà rispondere al quesito: Per qual numero si deve moltiplicare un metro, per ottenere centoventicinque centimetri? se non a condizione di attribuire alla parola « numero » un significato diverso e più generale del precedente. Da un centimetro, se ne ricavano centoventicinque, moltiplicandolo per centoventicinque. Perciò, potremo domandare, in primo luogo: Per qual numero si deve moltiplicare un metro per ottenere un centimetro? E questo quesito a tutta prima pare assurdo, perchè un centimetro si deve moltiplicare per cento, per dedurne un metro: e un metro, per dedurne un centimetro, non si deve moltiplicare, ma dividere per cento.

Così, un metro si trasforma in centoventicinque centimetri, dividendolo in cento parti eguali, e prendendone

centoventicinque, o, per dirla più brevemente, dividendo per cento e moltiplicando per centoventicinque. La divisione e la moltiplicazione si potranno anche scambiare; si otterrà egualmente centoventicinque centimetri, moltiplicando in primo luogo per centoventicinque, ciò che darà per risultato centoventicinque metri, e dividendo poi questa lunghezza in cento parti eguali.

Ora, se, invece d'inventare un nome a posta, per indicare questa doppia operazione, consistente nel dividere per cento e moltiplicare per centoventicinque, conveniamo di applicarvi l'antico termine di moltiplicazione, in virtù di questa convenzione, un metro si convertirà in centoventicinque centimetri per mezzo di una moltiplicazione. L'operazione in discorso si rappresenta col segno $\frac{125}{100}$; e si dice che, per trasformare un metro in centoventicinque centimetri, si deve moltiplicarlo per la *frazione* $\frac{125}{100}$. Il numero scritto al di sopra (125) si chiama il *numeratore* della frazione, e quello scritto al di sotto (100) il *denominatore*.

Nel primo capitolo abbiamo veduto come alle formole dell'aritmetica e dell'algebra si potesse attribuire un doppio significato. Così, per esempio, il segno 3 aveva originariamente il significato di un certo numero di lettere, di persone, o d'altre cose qualunque; mentre, in seguito, fu considerato come simbolo d'un'operazione, e cioè della triplicazione d'una cosa. Analogamente, il segno $\frac{125}{100}$ potrà rappresentare così l'operazione, mediante la quale un metro si trasforma in centoventicinque centimetri, come « quel tanto » di un metro che si ottiene con questa operazione.

Il grado in cui una quantità è maggiore o minore di

un'altra, o, con termini più precisi, la grandezza della trazione, o della compressione, che dev'essere applicata alla seconda, per dedurne la prima, si chiama il *rapporto* delle due quantità. Rappresentando con a e b due lunghezze qualunque, il rapporto di a a b è la trazione, o la pressione, che converte b in a; e questa operazione si potrà sempre esprimere, almeno approssimativamente, per mezzo di un numero.

§ 4. *Espressione aritmetica dei rapporti.*

Per ottenere un'espressione approssimata di un rapporto, si adoperano più comunemente due metodi. Con entrambi, come per misurare, in generale, una quantità, si adopera una serie di campioni, di mano in mano più piccoli; se non che, coll'uno, questi campioni si scelgono, attenendosi ad una legge prestabilita: mentre, coll'altro essi sono suggeriti, volta per volta, dal rapporto speciale che si tratta di misurare.

Il primo metodo consiste nell'adoperare una serie di campioni, ciascuno dei quali è la decima parte del precedente. In tal caso, per esprimere il rapporto di centoventicinque centimetri ad un metro, procederemo così. Osserveremo, in primo luogo, che centoventicinque centimetri contengono una volta un metro, e che, toltone questo metro, restano venticinque centimetri, pari ad un quarto di metro. Questa lunghezza si misurerà in decimi di metro; si troverà così che è due decimi, coll'avanzo di un pezzo della lunghezza di un mezzo decimo. Perciò, trascurando questo avanzo, il rapporto considerato risulterà espresso da 12 decimi, ossia, in cifre, da 1,2. Tenendone invece calcolo,

lo misureremo in centesimi di metro; e troveremo che ne fa esattamente 5. Quindi il risultato è 125 centesimi, ossia 1,25 esattamente.

Per dare un altro esempio, procuriamo di esprimere, collo stesso metodo, la lunghezza della diagonale di un quadrato in termini del lato. Si riconoscerà a prima vista che essa contiene il lato una volta, coll'avanzo di un pezzo: per modo che il rapporto considerato sarà 1, più una frazione. Misurando il pezzo che avanza in decimi di lato, si troverà che ne contiene 4 con un avanzo. Perciò il rapporto della diagonale al lato si potrà esprimere approssimativamente con 14 decimi, o 1,4. Misurando anche il nuovo avanzo, in centesimi di lato, si troverà che ne contiene uno, più un pezzetto. Quindi un'espressione ancor più approssimata del rapporto medesimo sarà 141 centesimi, o 1,41. Ora, si riconoscerà che quel pezzetto contiene 4 millesimi di lato; e così si arriva ad un'espressione ancora più precisa, 1414 millesimi, o 1,414. Questa operazione si potrà spingere finchè l'approssimazione sarà grande finchè si vuole; ma, in questo caso, diversamente dal precedente, non finirà mai; perchè il rapporto della diagonale di un quadrato al lato è uno di quelli che non si possono esattamente rappresentare per mezzo di numeri.

L'altro metodo d'approssimazione differisce da quello che abbiamo ora spiegato in ciò, che le quantità di mano in mano più piccole, prese come campioni, per mezzo delle quali si misurano i successivi residui, invece di essere quantità prefissate, un centimetro, un decimo di centimetro, un centesimo di centimetro, e va dicendo, si presentano nel corso dell'approssimazione.

Si comincia, come nel precedente caso, col trovare

quante volte la minore delle due quantità sta nella maggiore: per esempio, col trovare quante volte il lato di un quadrato sta nella diagonale. In questo caso, la risposta è una volta, con un avanzo. Rappresentiamo il pezzo che avanza con a. Ciò che allora si fa, è cercare quante volte questo residuo, a, sta nel lato. Esso ci sta due volte, con un avanzo, che rappresenteremo con b. Allora, cerchiamo quante volte b sta in a. Ci sta egualmente due volte, con un avanzo, c. E così via. Questa operazione si potrà ripetere finchè si vuole, a meno che, una certa volta, non rimanga nessun residuo. Nel caso in discorso, si trova che ogni residuo sta due volte nel precedente, con un certo resto.

Ora, vediamo come si possa trovare in tal modo una serie di valori approssimati del rapporto della diagonale al lato di un quadrato.

Supponiamo, in primo luogo, che il pezzo a sia risultato esattamente la metà del lato, ossia, che si trascuri il residuo b. In tal caso, la diagonale sarebbe eguale al lato accresciuto di una metà, e cioè eguale a tre mezzi del lato.

Ora, teniamo conto di b, ma trascuriamo c; vale a dire, supponiamo che b sia risultato esattamente una metà di a. Con questa ipotesi, il lato contiene due volte a, e metà di a, cioè cinque mezzi di a, donde segue che a è due quinti del lato. Ora, la diagonale è eguale al lato accresciuto di a; quindi è eguale al lato accresciuto di due quinti, ossia contiene sette quinti del lato. Il pezzo che così si trascura è minore di b, e b è un quinto del lato.

Così pure, teniamo conto di c, e supponiamo che sia precisamente eguale a metà di b. Allora, a, che contiene due volte b coll'avanzo di c, sarà cinque mezzi di b, e, per conseguenza, b sarà due quinti di a. Segue da ciò

che il lato conterrà due volte *a* e due quinti di *a*, cioè dodici quinti di *a*, per modo che *a* sarà cinque dodicesimi del lato. Ma la diagonale è eguale al lato accresciuto di *a*: quindi, sarà diciassette dodicesimi del lato. Si vede che questa approssimazione è maggiore della prima: difatti, il pezzo, che ora si trascura, è minore di *c*, che è metà di *b*, che è due quinti di *a*, che è finalmente cinque dodicesimi del lato: e da ciò segue che è minore di un dodicesimo del lato.

Così continuando, si potrà spingere l'approssimazione fino a quel grado che si vuole.

Il primo metodo si chiama metodo dei *decimali*, il secondo, delle *frazioni continue*.

§ 5. *La quarta proporzionale.*

Una delle circostanze più notevoli, per le quali differiscono le quantità dai numeri, è quella, senza dubbio, che, mentre un numero non si può dividere per un altro, se non è per avventura un multiplo di esso, pare, e difatti è generalmente ammesso, che ogni quantità si possa dividere per un numero qualsivoglia: ciò che torna ad ammettere, poichè ogni quantità si può rappresentare per mezzo di una lunghezza, che ogni lunghezza si può dividere in un numero qualsivoglia di parti eguali.

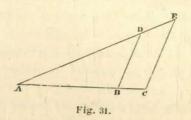
Ammesso che la divisione di una quantità per un numero sia sempre possibile, si potrà sempre eseguire anche l'operazione composta di una moltiplicazione e di una divisione, che abbiamo chiamato « moltiplicare per una frazione. » Così, per esempio, si potranno trovare tre decimi, non solo di un metro, ma di qualunque altra lunghezza.

Ora si presenta la questione, se si potrà parimente applicare ad ogni quantità quell' operazione di trazione, o di compressione, a cui abbiamo dato il nome di *rapporto.* Date tre lunghezze a, b, c, una trazione, od una compressione, determinata, applicata ad a, la convertirà in b. Si potrà, con una trazione od una compressione, dedurre analogamente da c una quarta lunghezza, d, tale che il rapporto di c a d sia lo stesso che quello di a a b? Noi ammettiamo che questa quantità — che si chiama la *quarta proporzionale* — esista sempre; e questo postulato, che serve di fondamento a tutti i rami di matematica che in seguito esporremo, merita di essere ulteriormente studiato.

Si riconoscerà che esso è sostanzialmente incluso nel secondo dei nostri due postulati sullo spazio, e cioè in quello che si possono costruire figure della stessa forma, e di grandezza diversa. In virtù di questo postulato, come abbiamo osservato a suo luogo, un triangolo si deve ridurre ad un altro della stessa forma, mediante un eguale ingrandimento de' suoi tre lati (*); e poichè due triangoli hanno la stessa forma, con qualunque grandezza, quando hanno gli angoli eguali, ciò torna a dire che, se due triangoli hanno gli stessi angoli, i tre rapporti dei diversi lati dell'uno al lato corrispondente dell'altro saranno fra loro eguali. Ciò ammesso, è chiaro che la ricerca della quarta proporzionale si riduce alla costruzione di due triangoli della stessa forma. Così, per esempio, rappresentino AB e AC le prime due quantità, e AD la terza (fig. 31), e si debba trovare la quantità, che si ricava da AD, per mezzo della

(*) L'« eguale ingrandimento » dei lati di un triangolo s'intenderà definito puramente dalla circostanza, che, per mezzo di esso, il triangolo conserva la stessa forma. *Nota del Traduttore.*

stessa trazione che converte AB in AC. Immaginiamo congiunto B con D, e descriviamo la retta CE, in modo che l'angolo ACE sia eguale ad ABD. I due triangoli ABD e ACE avranno la stessa forma; per conseguenza, ACE si potrà

Fig. 31.

ricavare da ABD, stirandone egualmente tutti i lati; e ciò vuol dire che la trazione, che converte AB in AC, è la stessa di quella che converte AD in AE, per modo che AE è la quarta proporzionale cercata.

Ma gioverà definire più precisamente che cosa s'intende per quarta proporzionale. Finora l'abbiamo puramente definita come qualche cosa che si deduce da AD, colla stessa operazione, mediante la quale AC si deduce da AB. Ora, quando si dirà che l'operazione è la stessa? Dalla precedente costruzione si ricava un criterio geometrico, secondo il quale il rapporto di AD ad AE deve dirsi « eguale » al rapporto di AB ad AC, quando due triangoli della stessa forma possono avere per lati corrispondenti AB ed AC, AD ed AE. Ma, quando sia possibile, per mantenere distinta la scienza della quantità da quella dello spazio, converrà trovare una definizione della quarta proporzionale fondata sopra il solo concetto di quantità. Tale definizione si può dare effettivamente; e importa assai di ben afferrarne la natura, perchè definizioni dello stesso genere si daranno

anche d'altre quantità, la cui esistenza si ammette, in virtù del così detto *principio della continuità:* il quale non è altro che il postulato precedentemente ammesso, che ogni quantità si possa dividere in un numero qualsiasi di parti eguali.

Se due operazioni di trazione, eseguite sopra una stessa quantità, producono risultati diversi, è naturale d'ammettere che quella, che produce il maggior effetto, lo produrrà, a parità di circostanze, in qualunque altro caso. Ciò posto, noi fonderemo la nostra definizione di quarta proporzionale sull'ovvio postulato, che, se due operazioni di trazione si eseguiscono sopra due *diverse* quantità, quella che produce il maggior effetto in un caso, lo produrrà anche nell'altro.

Supponiamo che si sia procurato di determinare, in via d'approssimazione, il rapporto di AC ad AB, e che si sia trovato che AC è compreso fra diciassette dodicesimi, e diciotto dodicesimi di AB. Confrontiamo l'operazione di trazione rappresentata da $\frac{17}{12}$, che consiste nel moltiplicare la quantità considerata per 17, e dividerla per 12, con quella che converte AB in AC. Il risultato della prima è, per supposto, minore di quello della seconda, perchè AC è più di diciassette dodicesimi di AB. Ora, immaginiamo di eseguire le due operazioni sopra AD. La prima produrrà diciassette dodicesimi di AD, e la seconda, la quarta proporzionale cercata. Quest'ultima, per la nostra ipotesi, produrrà, anche in questo caso, il maggior effetto, e perciò la quarta proporzionale in discorso, sarà maggiore di diciassette dodicesimi di AD.

Ma abbiamo supposto di più che AC fosse minore di di-

ciotto dodicesimi di AB; quindi l'operazione che converte AB in AC, confrontata con quella che consiste nel moltiplicare per 18 e dividere per 12, produce un risultato minore. Immaginiamo di eseguire queste due operazioni sopra AD. La prima produrrà, anche in questo caso, l'effetto minore, e perciò la quarta proporzionale cercata sarà minore di diciotto dodicesimi di AD.

È chiaro che si arriverà alla stessa conclusione, qualunque sia la frazione che si considera; e perciò possiamo enunciare il nostro risultato in questa forma generale:

Secondo che AC sarà maggiore o minore di una determinata frazione di AB, la quarta proporzionale (supposto che esista) sarà maggiore o minore della stessa frazione di AD.

Ora dimostreremo che non potrà darsi che due lunghezze diverse soddisfacciano ad un tempo a questa condizione: donde concluderemo che la quarta proporzionale da quella sua proprietà risulta perfettamente definita.

Supponiamo, per un momento che le lunghezze AE ed AE′ siamo entrambe una quarta proporzionale ad AB, AC, AD (fig. 32). In tal caso, prendendo un numero abbastanza grande di lunghezze eguali ciascuna ad EE′, la loro somma riuscirà maggiore di AD. Supponiamo, per fissare le idee, che AD sia compresa fra la somma di 500 e quella di 501 di esse. Allora, se immaginiamo di dividere AD in 501 parti eguali, ciascuna sarà minore di EE′; e, per conseguenza, se, partendo da D, prenderemo sopra DE′ tante lunghezze eguali a ciascuna di queste parti, uno dei punti di divisione, poichè EE′ è maggiore della distanza di due consecutivi, dovrà cadere fra E ed E′. Sia F questo punto. Allora AF si ricaverà da AD, moltiplicando per un certo

numero, e poi dividendo per 501. Eseguendo la stessa operazione sopra AB, si troverà una lunghezza AG, la quale dev'essere maggiore o minore di AC. Supposto che sia minore di AC, l'operazione che converte AB in AG sarà una frazione di grandezza minore di quella che converte AB in AG. Segue da ciò che l'operazione, che converte AD in AF, dev'essere una frazione minore così di quella per mezzo della quale, da AD, si deduce AE, come di quella per mezzo della quale, dalla stessa AD, si deduce AE'; e per conseguenza, AF sarà, ad un tempo, minore di AE e di AE'. Ora, ciò è impossibile perchè F cade fra E ed E'. Arriviamo così ad una conclusione assurda; ed è chiaro che si arriverebbe allo stesso risultato, supponendo AG maggiore di AC.

Concludiamo quindi che non vi potrà essere più di una lunghezza, che soddisfaccia alla condizione che l'operazione, per mezzo della quale essa si deduce da AD, sia maggiore di ogni frazione minore di quella che converte AB in AC, e minore d'ogni frazione maggiore dell'operazione medesima, ciò che volevamo dimostrare.

Consideriamo più attentamente la natura di questa definizione.

Abbiamo detto che, presa una frazione qualunque, se sarà maggiore del rapporto di AC ad AB, lo sarà anche del rapporto di AE ad AD, e, se sarà minore del primo rapporto, lo sarà anche del secondo.

Fissata la frazione, si potrà sempre provare se ciò si verifica; e perciò si potrà riconoscere se una lunghezza AE, che si suppone essere la quarta proporzionale, soddisfa a quella condizione, per ogni frazione assegnabile. Secondo la nostra definizione, la quarta proporzionale

deve soddisfarvi per tutte le frazioni possibili. Ciò non si potrà constatare direttamente; ma si concepisce come si potrà dimostrare che una quantità vi soddisfa per una frazione determinata, in modo che la stessa dimostrazione regga, qualunque sia il valore che si attribuisce alla frazione medesima. In questo caso riuscirà dimostrato, non solo che esiste una quarta proporzionale, ma di più che essa non è altro che la quantità in discorso.

Ciò si può fare appunto, valendosi dei lati di due triangoli simili. Dividendo la lunghezza AB (fig. 33) in un nu-

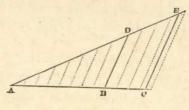



Fig. 33.

mero qualunque di parti eguali, e dai punti di divisione descrivendo altrettante rette formanti con AB lo stesso angolo che forma BD, esse divideranno AD nello stesso numero di parti eguali. Segniamo dei punti di divisione alla stessa distanza, l'uno dall'altro, da B, andando verso C: e da essi descriviamo egualmente tante rette formanti con AB lo stesso angolo che forma BD; queste rette taglieranno pure tante distanze eguali, da D, andando verso E. Ora, se una di queste rette si spiccherà da AC, fra C e A, essa incontrerà AE fra E e A, perchè il triangolo da essa formata con AC e AE deve avere la stessa forma che ACE. E, per la stessa ragione, ogni retta che si spicca da AC

dalla parte opposta di C, incontrerà AE dalla parta opposta di E.

Consideriamo le diverse frazioni di AB, che così riescono segnate. È chiaro che, se una di esse è minore, o maggiore, di AC, la stessa frazione di AD è rispettivamente minore, o maggiore, di AE. Segue da ciò che la retta AE, data dalla costruzione, soddisfa, nel caso di una frazione qualsivoglia, alla condizione alla quale deve soddisfare la quarta proporzionale. Per conseguenza, ammessa la seconda ipotesi sullo spazio, la quarta proporzionale esisterà sempre, e la precedente costruzione c'insegna come possiamo ogni volta effettivamente trovarla.

Resta da considerare un'objezione, che si può fare alla precedente definizione della quarta proporzionale, o, per meglio dire, un punto, nel quale possiamo migliorarla, in modo da renderla un fondamento più solido per lo studio dei rapporti.

Ecco di che si tratta. La nostra definizione suppone che le quantità siano continue: vale a dire che ogni quantità si possa dividere in un numero qualunque di parti eguali: ipotesi implicita in quella che si possa prendere d'ogni quantità una frazione numerica qualsivoglia. Per esempio, noi diciamo che, se a, b, c, d sono proporzionali, e a è maggiore di tre quinti di b, c sarà maggiore di tre quinti di d. Ora, per trovare tre quinti di b, o si dividerà b in cinque parti eguali, e se ne prenderanno tre, o si moltiplicherà b per tre, e si dividerà il risultato in cinque parti eguali. (Si sa che il risultato di queste due operazioni è lo stesso). Per conseguenza, sia in un caso che nell'altro, si suppone che una data quantità si possa dividere in cinque parti eguali.

Ora, in una definizione, si deve ammettere il meno che si può; e perciò, attenendoci al modo nel quale i geometri greci definirono la proporzione, ossia (ciò che torna effettivamente lo stesso) la quarta proporzionale di tre quantità date, abbiamo procurato di evitare quella supposizione.

Ciò non è difficile. Difatti, consideriamo lo stesso esempio di prima. Noi diciamo che, se *a* è maggiore di tre quinti di *b*, *c* sarà maggiore della stessa frazione di *d*. Ora, moltiplichiamo così *a* come *b* per cinque. Allora, poichè *a* è maggiore di tre quinti di *b*, la quantità in cui si converte *a* dev'essere maggiore di tre quinti della quantità in cui si converte *b*: ossia, se il nuovo *b* si divide in cinque parti eguali, il nuovo *a* dev'essere maggiore di tre di esse. Ma ognuna di queste cinque parti sarà eguale al primitivo *b*. Quindi, fa lo stesso dire che *a* è maggiore di tre quinti di *b*, come che cinque volte *a* è maggiore di tre volte *b*; e analogamente, nel caso di *c* e *d*.

Ora, come tre quinti, ogni frazione involge due numeri, e rappresenta un'operazione composta, consistente nel moltiplicare per un numero, e dividere per un altro. Quindi è chiaro che, in generale, nonchè nel caso di quella frazione speciale, potremo trasformare la proposizione colla quale abbiamo definito la quarta proporzionale, ponendola sotto la forma seguente: Secondo che *m* volte *a* sarà maggiore o minore di *n* volte *b*, dinotando *m*, *n* due numeri interi qualunque, *m* volte *c* sarà maggiore, o minore, di *n* volte *d*.

Questo è uno dei modi, in cui la definizione fu data dai geometri greci. È chiaro che la continuità delle quantità considerate non è più in questione; perchè, sia vero o no che un numero si possa dividere in un numero dato qua-

lunque di parti eguali, è certo che si potrà formare un multiplo qualsivoglia di esso.

Questi concetti fondamentali di rapporto, di eguaglianza di due rapporti, e di quarta proporzionale, sono ora stabiliti in modo generale, e per rispetto a quantità di qualsiasi natura, colla sola supposizione che si possa sempre formare un multiplo qualsivoglia di ogni data quantità.

§ 6. *Sulle aree. Trazione e compressione.*

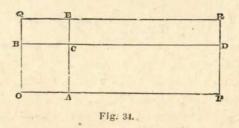
Ora, applicheremo i precedenti concetti al caso delle aree, o quantità di superficie, e, in particolare, alle aree piane.

La figura che si misura più facilmente è il rettangolo. Il calcolo dell'area di un rettangolo, in molti casi, si riduce puramente alla moltiplicazione di due numeri. Per esempio, un rettangolo lungo 7 metri, e largo 5, conterrà 35 metri quadrati: ciò che segue immediatamente dal concetto di moltiplicazione di due numeri, che abbiamo stabilito a suo luogo (pag. 7). Ma noi potremo trovare l'area d'un rettangolo a questo modo, solamente quando i suoi lati contengano un certo numero di volte l'unità di lunghezza: nel qual caso il prodotto dei due numeri, che indicano quante volte due lati concorrenti contengono l'unità, sarà il numero delle volte che l'area in discorso contiene il quadrato che ha per lato l'unità medesima. Resta da trovare un metodo, che possa servire in ogni caso.

A questo scopo, osserviamo prima di tutto che, allungando, o accorciando, un lato di un rettangolo in un determinato rapporto, mentre l'altro lato si mantiene inva-

riato, l'area verrà aumentata, o diminuita, nello stesso rapporto.

Ciò posto, per convertire un quadrato, OACB, in un rettangolo qualsivoglia, come sarebbe, per esempio, OPRQ, potremo stirare, in primo luogo, il lato OA, finchè si riduce eguale ad OP, convertendo così il quadrato nel rettangolo OD, e ingrandendone l'area nel rapporto di OA ad OP; e poi stirare il lato OB del nuovo rettangolo, finchè si riduce eguale ad OQ, convertendo così il rettangolo medesimo in OR, e ingrandendone l'area nel rapporto di OB ad OQ. Oppure, potremo cominciare col ridurre il lato OB alla lun-

Fig. 34.

ghezza di OQ, per modo che il quadrato OC si converta nel rettangolo OE, e poi ridurre OA alla lunghezza di OP, per modo che OE diventi OR.

In conclusione, il quadrato OC si deve stirare nel rapporto di OP ad OA, e in quello di OQ ad OB: ossia, poichè abbiamo convenuto di chiamare la trazione col nome di moltiplicazione (pag. 122), si deve moltiplicarlo per l'uno, e per l'altro rapporto: e l'operazione, che consiste nel convertirlo nel rettangolo OR, si compone di due moltiplicazioni.

Il risultato prova che l'ordine in cui le due moltiplica-

zioni si eseguiscono è indifferente. Difatti, rappresentando con a il rapporto di OP ad OQ, e con b quello di OQ ad OB, a e b rappresenteranno altresì il rapporto del rettangolo OD al quadrato OC, e quello di OR a OD. In altre parole, a volte OC fà OD, e b volte OD, OR: per modo che b volte a volte OC fà OR, O, colla scrittura convenuta, ba volte OC fa OR (*).

Analogamente, si troverà che b volte OC fà OE, e a volte b volte OC, a volte OE, che fà OR.

Vediamo quindi che ba volte OC fà lo stesso come ab volte OC, ossia che si ha, valendosi della nota scrittura,

$$ba = ab:$$

la qual relazione esprime che, moltiplicando prima pel rapporto a, e poi pel rapporto b, si ottiene lo stesso risultato, come moltiplicando prima per b, e poi per a.

La proposizione, che, quando si moltiplica per due rapporti, essi si possono prendere in un ordine qualsivoglia, senza alterare il risultato, si può presentare anche sotto un'altra forma.

Date quattro quantità a, b, c, d, la quantità a, per mezzo di due operazioni eseguite l'una di seguito all'altra, e cioè, moltiplicandola pel rapporto di b ad a, ciò che la converte in b, e poi pel rapporto di d a b, si converte in d. Ora, si ottiene lo stesso risultato, moltiplicando a pel

(*) Per una convenzione nata dall'uso abituale di leggere da sinistra a destra, i simboli di una moltiplicazione, e di qualsiasi altra operazione, si leggono sempre da *destra a sinistra*. Così ab volte una quantità x significa a volte b volte x, ossia che si moltiplica x prima per b e poi per a, eseguendo prima quell'operazione il cui simbolo viene dopo.

rapporto di c ad a, ciò che converte a in c, e poi pel rapporto di d a c. Il rapporto di b ad a si suol rappresentare con una delle quattro abbreviature seguenti:

$$b : a,\ \frac{b}{a},\ b \div a,\ b/a;$$

e perciò, questo fatto sarà espresso dall'eguaglianza:

$$b/a \times d/b = c/a \times d/c.$$

Ora, supponiamo che le quattro quantità a, b, c, d siano proporzionali, cioè che i rapporti b/a e d/c siano fra loro eguali. Dalla precedente eguaglianza segue che i rapporti c/a e d/b saranno pure eguali.

Questa proposizione si può enunciare anche in questa altra forma, che, se a, b, c, d sono proporzionali, lo sono anche a, c, b, d: purchè, s'intende, l'enunciato abbia senso, perchè potrà darsi anche il caso che non ne abbia punto. Per esempio, supposto che a e b siano due lunghezze, e c, d due intervalli di tempo, si sa che cosa significa il rapporto di b ad a, e quello di d a c, e si vede come i due rapporti potranno essere eguali; ma non si potrà parlare di rapporto di c ad a, o di d a b, perchè le due quantità non sono della stessa specie. Invece, in generale, quando quattro quantità *della stessa specie* sono proporzionali, esse sono proporzionali anche prese *alternativamente*, cioè, scambiando le due di mezzo.

§ 7. *Sulle frazioni.*

Abbiamo veduto nel § 3 (pag. 122) come una frazione

rappresenti un rapporto. Siano i rapporti a e b rispettivamente rappresentati dalle frazioni $\frac{p}{q}$ e $\frac{r}{s}$, dove p, q, r, s sono altrettanti numeri. Il risultato al quale siamo giunti a pag. 138 si potrà esprimere così:

$$\frac{p}{q} \times \frac{r}{s} = \frac{r}{s} \times \frac{p}{q}.$$

Esaminiamo alquanto più attentamente il significato dei singoli membri di questa eguaglianza. Perciò, immaginiamo di prendere un rettangolo OQTS, del quale un lato,

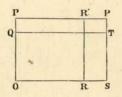



Fig. 35.

OQ, contenga q unità di lunghezza, e l'altro, OS, ne contenga s. Questo rettangolo si potrà dedurre dal quadrato il cui lato è l'unità di lunghezza, applicandovi le due trazioni q e s. Quindi la sua area vale qs unità quadrate. Ora, applichiamo a questo rettangolo le trazioni rappresentate da $\frac{p}{q}$ e $\frac{r}{s}$, l'una dopo l'altra: la prima nella direzione del lato OQ, la seconda, in quella di OS. La prima operazione torna a dividere OQ in q parti eguali, e a prendere OP eguale a p di esse; e, poichè ciascuna sarà eguale all'unità, OP conterrà p unità, e il rettangolo OT si conver-

tirà in OP′, di cui un lato, OP′, contiene p unità, e l'altro, OS, ne contiene s. Su questo rettangolo si deve eseguire la seconda operazione (nella figura rappresentata da una *compressione*) la quale consiste nel dividere OS in s parti eguali, e prenderne r, ossia nel misurare lungo OS una lunghezza eguale a r unità. Così, la seconda trazione convertirà il rettangolo OP′ in OR′, di cui il lato OP contiene p unità di lunghezza, e il lato OR ne contiene r, per modo che l'area vale pr unità quadrate. Vediamo dunque che le due tensioni $\frac{p}{q}$ e $\frac{r}{s}$, successivamente applicate al rettangolo OT, lo convertono in OR′; e ciò si può esprimere simbolicamente nel seguente modo:

$$\frac{p}{q} \times \frac{r}{s} \cdot \text{rettangolo OT} = \text{rettangolo OR}'$$
$$= pr \text{ rettangoli unitarii.}$$

Ora, è chiaro che il rettangolo unitario, vale a dire il quadrato che ha per lato l'unità di lunghezza, si potrà dedurre dal rettangolo OT, comprimendolo successivamente nel rapporto $\frac{1}{q}$ secondo OQ, e nel rapporto $\frac{1}{p}$ secondo OS: ciò che torna semplicemente a dire che OT vale qs rettangoli unitarii, come si è precedentemente riconosciuto. Per conseguenza, l'operazione $\frac{p}{q} \times \frac{r}{s}$, eseguita sul rettangolo unitario, produrrà un risultato eguale a $\frac{1}{qs}$ di quello che produce, eseguita sopra OT; cioè $\frac{p}{q} \times \frac{r}{s} \cdot$ rettangolo unitario $= \frac{1}{qs} \cdot pr$ rettangoli unitarii:

ossia, per la notazione convenuta, $= \frac{pr}{qs} \cdot$ rettangolo unitario.

Concludiamo che l'operazione $\frac{p}{q} \times \frac{r}{s}$, eseguita sull'unità, produce lo stesso effetto come l'operazione $\frac{pr}{qs}$, consistente nel moltiplicare l'unità per pr, e dividere il risultato per qs. Questa equivalenza costituisce la così detta *moltiplicazione delle frazioni.*

Un caso particolare degno di nota si presenta, quando s è eguale a r. Allora, si ha:

$$\frac{p}{q} \times \frac{r}{r} = \frac{pr}{qr}.$$

Ora, $\frac{r}{r}$ indica che si deve dividere l'unità in r parti eguali, e prenderne r, ciò che torna a eseguire un'operazione *nulla*. Perciò, il simbolo di tale operazione si potrà omettere; donde segue

$$\frac{p}{q} = \frac{pr}{qr};$$

risultato, che per disteso si può enunciare così: Data una frazione, il suo valore non si altera, moltiplicandone il numeratore e il denominatore per quantità eguali.

Per mezzo di questo risultato, si può facilmente interpretare l'operazione

$$\frac{p}{q} + \frac{r}{s}.$$

Difatti,

$$\frac{p}{q} = \frac{ps}{qs}, \text{ e } \frac{r}{s} = \frac{qr}{qs}.$$

Quindi,

$$\frac{p}{q} + \frac{r}{s} = \frac{ps}{qs} + \frac{qr}{qs}.$$

Ció vuol dire che eseguire sull'unitá l'operazione $\frac{p}{q}$, e aggiungere al risultato quello dell'operazione $\frac{r}{s}$, fa lo stesso come dividere l'unità in qs parti, e prenderne ps, per poi aggiungervene altre qr. Ma ciò, alla sua volta, fa lo stesso come prenderne addirittura $ps + qr$. Quindi,

$$\frac{p}{q} + \frac{r}{s} = \frac{ps + qr}{qs}.$$

In ciò consiste la così detta *addizione delle frazioni*. Il lettore non incontrerà alcuna difficoltà ad interpretare graficamente questa operazione, per mezzo di una successione di trazioni e compressioni del rettangolo unitario.

Divisione si chiama, in generale, l'operazione per mezzo della quale s'inverte il risultato della moltiplicazione. Perciò, quando si domanda che cosa significa *dividere* per la frazione $\frac{p}{q}$, si pone questo quesito: Qual'è l'operazione che, eseguita di seguito a $\frac{p}{q}$, ne inverte l'effetto?

Ora,

$$\frac{r}{s} \times \frac{p}{q} = \frac{p}{q} \times \frac{r}{s} = \frac{pr}{qs}.$$

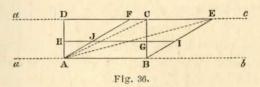
Poniamo $r = q$, $s = p$. Otteniamo

$$\frac{q}{p} \times \frac{p}{q} = \frac{pq}{qp};$$

ossia, moltiplicare l' unità per $\frac{p}{q}$, e poi per $\frac{q}{p}$, significa dividere l'unità in qp parti, e prenderne pq, per modo che l' unità rimane inalterata. Quindi la trazione $\frac{q}{p}$ inverte completamente $\frac{p}{q}$: ossia è una compressione che elide esattamente la precedente trazione. Concludiamo che moltiplicare per $\frac{q}{p}$ è un' operazione equivalente a *dividere* per $\frac{p}{q}$, o, in altre parole, che dividere per $\frac{p}{q}$ fa lo stesso come moltiplicare per $\frac{q}{p}$. In ciò consiste la *divisione delle frazioni.*

§ 8. *Di nuovo sulle aree. Trasformazione.*

Allungando, o accorciando i lati di un rettangolo, come finora si è supposto di fare, si altera l'area della figura,

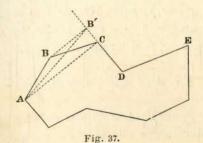
Fig. 36.

ma la forma si mantiene rettangolare. Ora, discorreremo di un'operazione che altera gli angoli, e lascia l'area invariata.

Sia ABCD un rettangolo, e ABEF un parallelogrammo (ossia un quadrilatero i cui lati opposti sono eguali) avente comune con esso il lato AB, e il lato opposto, EF (eguale ad AB, e, per conseguenza, a CD), in linea retta con CD. Poichè CD è eguale ad EF, i punti E ed F sono ad eguale distanza rispettivamente da C e da D, e da ciò segue che i due triangoli BCE e ADF sono eguali. Quindi se il triangolo BCE si staccasse lungo BC, e si portasse al posto di ADF, si trasformerebbe il parallelogrammo nel rettangolo, senza cambiare l'area; donde apparisce che le aree delle due figure sono eguali. Ora l'area del rettangolo è il prodotto delle quantità numeriche che rappresentano la lunghezza di AD e quella di AB. AB si chiama la *base* del parallelogrammo, e AD, distanza perpendicolare fra la base e il lato opposto EF, l'*altezza*. Quindi si dice in linguaggio abbreviato che l'area del parallelogrammo è « il prodotto della base per l'altezza. »

Supponiamo che CD e AB siano due aste rigide, scorrevoli lungo le rette parallele *cd* e *ab;* e immaginiamo che siano riunite da una membrana rettangolare elastica, ABCD. Facendo scorrere le aste, la membrana cambierà di forma; resterà però sempre un parallelogrammo di base e d'altezza costante, e, per conseguenza, la sua area si manterrà invariata. Supponiamo che AB si tenga fisso, e che CD sia spostata lungo *cd*, finchè prende la posizione EF. Allora ogni retta, GH, della membrana parallela ed eguale ad AB si sposterà parallelamente a sè stessa, e prenderà la posizione IJ, restando sempre della stessa lunghezza. Il tratto di cui si sposta il punto C è CE, e quello di cui si sposta G, GI. Poichè i triangoli CBE e GBI hanno i lati paralleli, sono simili, e perciò il rapporto di CE a GI è lo

stesso che quello di BC a BG: ossia, quando il rettangolo ABCD si trasforma nel parallelogrammo ABEF, ogni retta parallela ad AB non cambia di lunghezza, e si sposta parallelamente a sè stessa per un tratto proporzionale alla sua distanza da AB.

La stessa operazione, che trasforma il parallelogrammo ABEF nel rettangolo ABCD, trasforma il triangolo ABE, metà della prima figura, nel triangolo ABC, metà della seconda;

Fig. 37.

donde apparisce che ogni triangolo si può trasformare in un triangolo rettangolo, senza cambiarne l'area. L'area d'un triangolo qualsiasi è quindi eguale a metà di quella del rettangolo che ha la stessa base, e altezza eguale alla perpendicolare alla base descritta dall'angolo opposto. Questa perpendicolare si chiama egualmente l'altezza del triangolo, e perciò si dice brevemente che *l'area del triangolo è eguale a metà del prodotto della base per l'altezza.*

Una successione di trasformazioni della natura delle precedenti permetterà di ridurre una figura qualsivoglia limitata da rette ad un triangolo di area eguale; in seguito a che, per determinare l'area della figura, non resterà più che da trasformare questo triangolo in un trian-

golo rettangolo. Per esempio, sia ABCDE parte del contorno della figura. Immaginiamo di congiungere A con C, e trasformiamo ABC nel triangolo AB'C avente la stessa base, AC, e il vertice, B', nel punto d'incontro della parallela descritta per B ad AC col prolungamento di CD. L'area di AB'C sarà eguale a quella di ABC. Quindi, senza cambiare l'area, si può sostituire al contorno dato ABCDE il contorno AB'DE che contiene un lato di meno. Si vede così come, per mezzo di una successione di trasformazioni analoghe a questa, si possa ridurre ogni figura limitata da rette ad un triangolo d'area eguale, ciò che permetterà, in ogni caso, di determinarne l'area.

§ 9. *Area delle figure circolari.*

Una delle figure limitate da una curva, che si presentano più naturalmente alla nostra attenzione, è il *settore circolare*, parte di circolo racchiusa fra due raggi e l'arco

Fig. 38.

di circonferenza compreso fra le loro estremità. Prima di occuparci dell'area di questa figura, converrà che troviamo alcune delle principali proprietà del circolo, che hanno attinenza con questa ricerca.

Prendiamo un circolo, il cui raggio sia l'unità di lunghezza, e, per le estremità dei due diametri perpendicolari AB e CD, descriviamo le perpendicolari al diametro. Il circolo risulterà, in tal modo, iscritto in un quadrato (vedi la fig. 39), il cui lato avrà per misura 2, e l'area 4.

Ora, supponiamo che la figura composta del circolo e del quadrato riceva, in primo luogo, una trazione tale che ogni retta parallela al diametro AB si allunghi nel rapporto di a a 1, e quindi un'altra, tale che si allunghi nello stesso rapporto ogni retta parallela a CD. È chiaro che il quadrato della prima figura, in tal modo, si dilaterà, e diventerà un quadrato, i cui lati saranno eguali a $2a$.

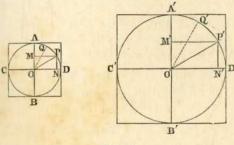



Fig. 39.

Resta da dimostrare che il circolo dilatandosi, si convertirà parimente in un altro circolo. Perciò, sia OP un raggio qualunque, e dall'estremo P descriviamo le perpendicolari PM, PN ai diametri AB e CD. Per effetto della prima trazione, le lunghezze eguali OM ed NP si convertiranno nelle lunghezze parimente eguali O'M', N'P', tali che $\frac{OM}{O'M'} = \frac{NP}{N'P'} = \frac{1}{a}$. Similmente, per effetto della seconda trazione, MP e ON, che

la prima lascia invariate, si convertiranno in M'P', O'N', tali che $\frac{ON}{O'N'} = \frac{MP}{M'P'} = \frac{1}{a}$, mentre O'M', N'P' si manterranno inalterate. Così, per effetto delle due trazioni, il triangolo OPN si convertirà nel triangolo O'P'N'; il quale ha la stessa forma, perchè gli angoli in N ed in N', essendo retti, sono eguali, e si è veduto che

$$\frac{NP}{N'P'} = \frac{1}{a} = \frac{OM}{O'M'}$$

(cfr. pag. 128).

Segue da ciò che il lato rimanente OP deve stare al lato rimanente O'P' nello stesso rapporto di 1 ad a; ossia, poichè OP è l'unità di lunghezza, O'P' dev'essere eguale alla quantità costante a. Inoltre, poichè gli angoli PON e P'O'N' sono eguali, O'P' sarà parallelo ad OP.

Concludiamo che il circolo di raggio 1 si convertirà in un circolo di raggio a; e perciò la figura, che se ne deduce, applicandovi le due trazioni in discorso, è in sostanza quella stessa, che si vedrebbe, osservandolo sotto una lente, la quale lo ingrandisse uniformemente, in modo che ogni retta apparisse allungata nel rapporto di a ad 1.

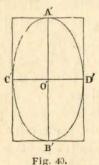
Da ciò segue che la circonferenza del secondo circolo deve stare a quella del primo nel rapporto di a ad 1, per modo che le circonferenze di due circoli stanno come i raggi. Inoltre, se l'arco PQ si converte nell'arco P'Q' — cioè, se O'P', O'Q' sono rispettivamente paralleli ad OP, OQ — l'arco P'Q' starà a PQ nel rapporto dei raggi dei due circoli. Ora PQ, P'Q' sono eguali a qualunque altro arco del rispettivo circolo, che sottenda lo stesso angolo al centro;

e perciò concludiamo, in generale, che *gli archi di due circoli, che sottendono angoli al centro eguali, stanno fra loro nel rapporto dei raggi corrispondenti.*

Poichè la seconda figura è un'immagine della prima, che si ottiene ingrandendola uniformemente, ogni elemento dell'area di essa deve riuscire ingrandito in una stessa misura. Ora, il quadrato, nella prima figura, contiene quattro unità di area, e, nella seconda, ne contiene $4a^2$. Quindi ogni elemento d'area della prima figura riuscirà ingrandito nel rapporto di a^2 a 1. Perciò l'area del circolo della prima figura starà a quella del circolo della seconda come 1 ad a^2; ossia, *le aree di due circoli stanno tra loro nel rapporto dei quadrati dei raggi.*

Rappresentiamo, secondo l'uso invalso, l'area del circolo di raggio 1 colla lettera greca π (pi). Per la precedente proposizione, l'area del circolo di raggio a sarà rappresentata da πa^2.

Se, dopo d'avere stirato le rette parallele ad AB nel rapporto di a ad 1, le rette parallele a CD si fossero

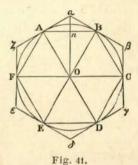
Fig. 40.

stirate, o compresse, invece che nello stesso rapporto, in quello di b ad 1, indicando con b una quantità diversa

da a, il quadrato della prima figura si sarebbe convertito in un rettangolo, avente lati rispettivamente eguali a $2a$ e a $2b$. Ora si può dimostrare che il circolo si sarebbe con ciò convertito in quell'ombra, che abbiamo chiamato ellisse. D'altra parte, ogni elemento di area, in tal caso, si sarebbe dilatato nel rapporto del prodotto di a e b a 1; e da ciò concludiamo che l'area di un ellisse, di cui il massimo e il minimo raggio sono rispettivamente a e b, sta a quello del cerchio di raggio uno nel rapporto di ab a 1, vale a dire che è rappresentata da πab.

Ora, procureremo di collegare l'area del circolo di raggio uno, che abbiamo convenuto di rappresentare con π, col numero di unità lineari contenute nella sua circonferenza.

Prendiamo sulla circonferenza di un circolo tanti punti uniformemente distribuiti, A, B, C, D, E, F. Congiungiamoli, nell'ordine in cui si succedono, l'uno coll'altro, e col punto O, centro del circolo, e descriviamo le perpendicolari ai raggi così tracciati (ossia le *tangenti* al circolo) nei punti A, B, C, D, E, F. Costruiremo così due figure perfettamente simmetriche, l'una delle quali si dice *iscritta*, e l'altra, *circoscritta* al circolo. L'area del circolo è evidentemente compresa fra quelle di queste due figure; e poichè la differenza fra l'area della prima e quella della seconda è la somma dei triangoletti AαB, BβC, CγD, ecc., la sua differenza dall'area della figura iscritta sarà minore della somma dei triangoli stessi. Ora, per ragione di simmetria, questi triangoli sono tutti eguali: e perciò la loro area è eguale al prodotto di una metà di αn, che ne rappresenta l'altezza, per la base, che è un lato della figura iscritta. Quindi la somma dei triangoletti è eguale al prodotto di

αn per la somma dei lati della figura medesima. La somma di questi lati non potrà mai diventar maggiore della circonferenza del circolo; e αn diventa tanto più piccola,

Fig. 41.

quanto più grande è il numero dei punti uniformemente distribuiti, che si prendono sulla circonferenza, per modo che tanto più piccola riesce la distanza di due consecutivi, come A e B. Per conseguenza, prendendo un numero abbastanza grande di questi punti, la somma dei triangoletti in discorso si potrà rendere piccola finchè si vuole: e così si potrà ottenere che le aree delle due figure, e quella del circolo, fra esse compresa, differiscano l'una dall'altra di meno di qualsiasi quantità assegnabile. Passando al limite, possiamo dire che, prendendone un numero infinito, queste aree riusciranno eguali.

Ora, l'area della figura iscritta è data dalla somma delle aree di tutti i triangoli analoghi ad A$o\beta$, la cui area è eguale a metà del prodotto dell'altezza on per la base AB: e perciò, se rappresentiamo il « perimetro » della figura, ossia la somma di tutti i lati AB, BC, ecc., con p, l'area stessa sarà eguale a $\frac{1}{2}\,p \times on$. Analogamente, se p' rap-

presenta la somma dei lati $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, ecc., della figura circoscritta, l'area della figura sarà eguale a $\frac{1}{2} p' \times$ OB.

Poichè i triangoli OaB e OBn hanno la stessa forma, essendo rettangoli, e avendo in O un angolo comune, il rapporto di Bn ad aB, ossia quello AB ad $a\beta$, rette rispettivamente doppie, sarà lo stesso che quello di On ad OB. Ora, è chiaro che p sta a p' nel rapporto di AB ad $a\beta$; quindi p sta a p' nel rapporto di On ad OB. Prendendo un numero abbastanza grande di punti, On si potrà rendere prossimo finchè si vuole ad OB: quindi si potrà rendere prossimo finchè si vuole p a p', e ciascuno di essi alla circonferenza del circolo, che sta fra l'uno e l'altro (*). Quindi, al limite, p sarà eguale alla circonferenza del circolo, e On al raggio, e concludiamo che le aree delle due figure, iscritta e circoscritta, che si approssimano tanto più all'area del circolo, quanto più grande è il numero dei loro lati, finiscono per diventare eguali l'una all'altra, e a metà del prodotto della circonferenza del circolo pel raggio. Perciò, questa dev'essere la misura dell'area del circolo, e troviamo così che l'area del circolo di raggio a è eguale a metà del prodotto della circonferenza per a. Ma si è trovato a suo luogo che l'area stessa è eguale a πa^2. Quindi la circonferenza dev'essere eguale a $\pi.2a$.

Questo risultato si può enunciare nei due modi seguenti:

1.° Il rapporto della circonferenza del circolo al diametro ($2a$) è una quantità costante, π.

2.° Il numero di unità lineari (2π) contenute nella circonferenza del circolo, il cui raggio è l'unità lineare, è

(*) Nel caso del circolo, ciò si riconosce intuitivamente.

doppio del numero di unità di area (π) racchiuse dalla circonferenza medesima.

Il valore di π, rapporto della circonferenza del circolo al diametro, è una quantità, che, come il rapporto della diagonale del quadrato al lato (vedi pag. 124), non si può esprimere esattamente in numeri; un valore approssimato è 3,14159.

Ora non abbiamo più alcuna difficoltà a trovare l'area di un settore circolare. Infatti, è chiaro che quest'area si raddoppia, se si raddoppia l'arco, si triplica, se l'arco si triplica, e, in generale, se si prende un multiplo qualunque dell'arco, si forma lo stesso multiplo di essa. Segue da ciò, pel § 5, che due settori stanno fra loro nel rapporto degli archi corrispondenti, e, in particolare, che un settore sta all'intero circolo nel rapporto dell'arco corrispondente all'intera circonferenza.

Rappresentando l'area del settore con S, e con s il numero d'unità di lunghezza contenute nell'arco, questa relazione si potrà esprimere simbolicamente così:

$$\frac{S}{\pi a^2}=\frac{s}{2\pi a}.$$

Di qui si ricava

$$S=\frac{1}{2}s\times a,$$

ossia: *l'area di un settore di circolo è metà del prodotto della lunghezza dell'arco corrispondente pel raggio.*

§ 10. *Sull'area dei settori curvilinei, in generale.*

La conoscenza dell'area del settore circolare ci permette

di determinare, con quel grado d'approssimazione che si vuole, l'area di un settore, il cui arco sia una curva qualunque. Dividiamo l'arco PQ in tanti archetti PA, AB, BC, CD, DQ. Supponiamo che l'arco PA sottenda, fra tutti, l'angolo più grande in O: e limitiamoci a considerare il caso in cui, facendo scorrere il punto P lungo l'arco, fino in Q, la retta OP diminuisca continuamente. In caso contrario, il

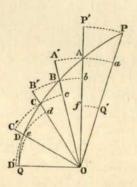



Fig. 42.

settore dato, OPQ, si potrà decomporre in tanti settori più piccoli, tali che la retta condotta da O all'arco diminuisca continuamente, nel passare da un lato all'altro del settore, e la seguente ricerca si applicherà a ciascuno di essi. Ciò premesso, facciamo centro in O, e descriviamo con raggio rispettivamente eguale a OP, OA, OB, OC, OD e OQ gli archi di circolo PP', *a*A', *b*B', *c*C', *d*D' e Q*e* (vedi la figura). È chiaro che l'area del settore sarà compresa fra quella della figura limitata dalle rette OP, OD' e dalla spezzata PP'AA'BB'CC'DD', e quella della figura limitata da O*a*, OQ e dalla spezzata

aAbBcCdDeQ, per modo che differirà così dall'una come dall'altra di meno della somma delle aree P'A, AA'b, B'c, C'd, D'e, che rappresenta la loro differenza. Ora, siccome l'angolo P'OP è, per supposto, maggiore di tutti gli altri angoli in O, la somma di queste aree sarà minore dell'area della figura PP'fQ', la quale si può rendere piccola finchè si vuole, prendendo abbastanza piccolo l'angolo AOP; ciò che torna a prendere abbastanza piccoli tutti gli angoli in O (per ipotesi, minori di AOP), e per conseguenza, a dividere l'arco PQ in un numero abbastanza grande di parti. Così, si potrà trovare una serie di settori circolari, tali che la somma delle loro aree differisca dall'area del settore POQ di una quantità piccola finchè si vuole; o, in altre parole, la ricerca dell'area di una figura limitata da una curva qualunque si può ridurre a quella, già compiuta, dell'area di un settore circolare. Il problema non presenta più altra difficoltà all'infuori di quelle che nascono dal dover sommare un numero grandissimo di quantità: poichè sarà necessario di dividere l'arco in un gran numero di parti, per raggiungere un grado sufficiente d'approssimazione.

§ 11. *Estensione del concetto di area.*

Sia ABCD una linea rientrante, che non taglia sè stessa, o, come vogliam chiamarla, un circuito, ed O un punto interno. Se s'immagina che un punto P ne faccia il giro, si dice che la retta OP descrive l'area da esso racchiusa; e con ciò s'intende di dire che le posizioni successivamente occupate dalla retta, prese a due a due, limitano,

coll'arco compreso, tanti settori elementari (*), tali che la somma delle loro aree, prendendo le posizioni successive

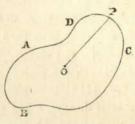
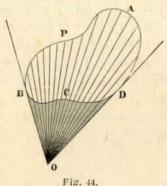



Fig. 43.

abbastanza vicine, si potrà rendere poco diversa quanto si vuole dall'area chiusa dalla linea in discorso.

Ora supponiamo che il punto o sia preso *fuori* del circuito ABCD, e procuriamo di determinare l'area descritta,

Fig. 44.

in questo caso, dalla retta OP, condotta da O al punto P, che s'immagina faccia, come nel caso precedente, il giro

(*) Intendasi, riferendosi a quanto fu veduto nel precedente §, settori circolari. *Nota del Traduttore.*

di ABCD. Siano OB e OD le posizioni estreme prese dalla retta OP, a sinistra e a destra. Allora, OP, mentre P percorre l'arco DAB, si moverà in senso contrario a quello degl'indici dell'orologio, da destra a sinistra, e descriverà l'area limitata dall'arco DAB, e dalle rette OD e OB: e si moverà poi nel senso degl'indici dell'orologio, da sinistra a destra, mentre P percorrerà l'arco complementare BCD, e descriverà l'area, nella figura distinta con una doppia ombreggiatura, limitata da BCD e dalle rette OB e OD. L'area racchiusa dal circuito ABCD è la *differenza* di queste due aree; e perciò, basterà considerare la seconda, OBCDO, come *negativa*, perchè la retta OP, anche nel presente caso, descriva l'area ABCD, mentre il punto P ne percorre il contorno. Ora, il carattere che distingue il modo in cui è descritta l'area ODABO, da quello in cui è descritta OBCDO, è questo, che, nel primo caso, OP gira in senso contrario a quello in cui si movono gl'indici dell'orologio, mentre, nel secondo, gira nel medesimo senso. Perciò, se si fa la convenzione di considerare le aree descritte da OP come positive, o negative, secondo che OP, per descriverle, si move in senso contrario a quello degli indici dell'orologio, o nel medesimo senso, dovunque sia posto O, dentro o fuori del circuito, quando il punto P ne farà il giro, la retta OP descriverà l'area da esso racchiusa.

Ora, osserviamo che P può descrivere il circuito, girando in senso contrario a quello degli indici dell'orologio, in modo da incontrare successivamente i punti ABCD, o nel medesimo senso, in modo da incontrare successivamente ADCB. Secondo la precedente convenzione, l'area maggiore, ODABO, nel primo caso, sarà positiva, e, nel secondo, negativa. Quindi, *un'area riceve un segno determinato:* e si

considera come positiva, o negativa, secondo che il suo contorno s'immagina descritto da un punto che si move in senso contrario a quello degli indici dell'orologio, o nel medesimo senso. Il concetto di area così esteso, secondo il quale un'area ha un certo *senso*, nonchè una certa grandezza, è di fondamentale importanza, non solo in molti rami delle scienze esatte, ma anche per numerose applicazioni che riceve in pratica.

Descriviamo per O (che, come abbiamo veduto, è un punto qualunque del piano del circuito) la perpendicolare al piano stesso, e prendiamo sopra di essa la lunghezza ON, contenente tante unità di lunghezza quante sono le unità d'area racchiuse dal circuito ABCD. ON rappresenterà l'area del circuito in grandezza; e, perchè la rappresenti anche in *senso*, basterà che conveniamo di prendere, in ogni caso, ON in tal direzione che una persona, che abbia i piedi in O e la testa in N, veda il punto P girare in senso contrario a quello degl'indici dell'orologio. Così, se l'area è positiva, N sarà al di sopra del piano, e sarà al di sotto, se l'area è negativa. Ciò posto, si potrà rappresentare un numero qualunque di aree, per mezzo di altrettanti segmenti di rette, o di passi perpendicolari ai loro piani; e la somma di un numero qualunque di aree, tutte poste in uno stesso piano, si otterrà, sommando algebricamente i passi che le rappresentano.

Se alcune aree giaceranno in piani diversi, le rette che le rappresentano non saranno più tutte parallele. Ora, in generale, le aree si possono sommare in due diversi modi. Può darsi che occorra di conoscere l'area complessiva, come, per esempio, quando si tratta di calcolare quanto costerà ad inverniciare, o a dorare, un solido a più faccie;

e, in questo caso, si sommeranno le rette rappresentative, senza preoccuparsi della loro direzione. Ma, in molti altri casi, si vuol trovare una quantità dipendente dalle faccie di un solido in tal modo che, per determinarla, bisognerà trattare le rette, che ne rappresentano l'area, come grandezze aventi una certa direzione. Si possono citare, come esempii, le ombre projettate da un corpo, o le pressioni esercitate da un gas sulle pareti del recipiente. Come si compongano le grandezze *dirette* si vedrà nel seguente capitolo. L'idea di considerare le aree come grandezze dirette si deve a Hayward.

§ 12. *Sull'area di un groppo chiuso.*

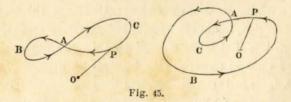
Finora abbiamo sempre supposto che le aree in discorso fossero limitate da una linea rientrante, che non taglia sè stessa. L'area di una figura, il cui contorno è una combinazione qualsiasi di più circuiti, si determina altrettanto facilmente. Così, consideriamo la linea in forma di otto rappresentata dalla fig. 45, la quale si compone di due circuiti; se s'immagina di percorrerla nel senso indicato dalle freccie, l'area d'uno dei due circuiti risulterà positiva, quella dell'altro, negativa; e perciò l'area complessiva sarà eguale alla loro differenza, e a zero, se, per avventura, esse avranno la stessa grandezza. Una linea chiusa, che, come questa, taglia sè stessa, si può chiamare un *groppo;* i punti in cui si taglia si sogliono chiamare *nodi.*

Una linea in forma di otto è quindi un groppo con un nodo. Quando l'area di una data linea rientrante s'immagina descritta da una retta condotta da un punto fisso, a un punto che si move lungo la linea, l'area varia a se-

conda del modo in cui si suppone che il punto si mova. Ma, se s'immagina che la linea sia disegnata dallo stesso punto mobile, l'area riceverà un valore, corrispondente al modo speciale in cui si suppone descritto il perimetro, perfettamente determinato.

Ora, mostreremo come il groppo più complesso si possa sempre decomporre in tanti circuiti, e come la sua area complessiva si deduca dalle aree di essi.

Indichiamo per mezzo di freccie la direzione secondo la quale s'immagina che il perimetro sia descritto; e consideriamo, in primo luogo, le due linee rappresentate dall'annessa fig. 45. È chiaro che, se s'immagina che P non attraversi il nodo A, ma percorra prima il circuito AC, e poi il circuito AB, facendo il giro di ciascuno nella direzione indicata dalle freccie, l'area descritta dalla retta mobile OP non sarà da ciò alterata. Ora, a questo modo, ogni linea, che taglia sè stessa in un nodo, si potrà convertire in due circuiti, che si toccano nel punto individuato dal nodo. Questa risoluzione dei nodi si può rendere manifesta all'occhio, rappresentando i due circuiti, che effettivamente si toccano, alquanto discosti l'uno dell'altro. La seguente figura rappresenta due nodi sciolti in questa maniera.

Fig. 45.

Ciò premesso, il lettore non incontrerà più alcuna dif-

ficoltà a scomporre un groppo, per complesso che sia, in semplici circuiti. L'area racchiusa dal groppo sarà la somma algebrica delle aree di questi circuiti, e le freccie distribuite lungo il perimetro basteranno per indicare quando si devono prendere come positive, o come negative. Ecco un esempio:

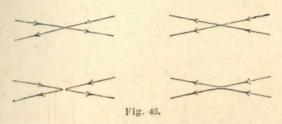
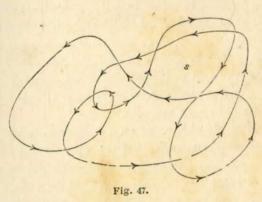
Fig. 46.

In questo caso, il groppo si riduce a un circuito negativo a, e ad un grande circuito positivo b, che comprende i due circuiti positivi c, d, il primo dei quali comprende, alla sua volta, un piccolo circuito e, egualmente positivo.

Fig. 47.

Perciò l'area complessiva racchiusa dal groppo è eguale

a $b + c + d + e - a$. Lo spazio segnato nella prima

Fig. 48.

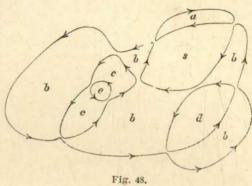



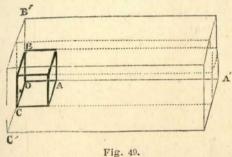
figura con s, si riconosce dalla seconda che non rappresenta parte alcuna dell'area in discorso.

§ 13. *Sui volumi dei solidi.*

Consideriamo, in primo luogo, il solido limitato da tre paja di piani paralleli, rispettivamente perpendicolari, che, con termine tecnico, si chiama un « parallelepipedo rettangolo. » Se uno spigolo di questo solido si allungherà o si accorcierà, in un rapporto qualsiasi, mentre gli spigoli non paralleli si mantengono invariati, il volume del solido varierà nello stesso rapporto.

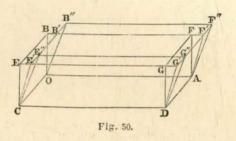
Segue da ciò che, preso un cubo, per dedurne un parallelepipedo rettangolo, basterà applicarvi tre trazioni (o compressioni) rispettivamente parallele alle tre serie di lati paralleli. Siano OA, OB, OC i tre lati del cubo, che concorrono in un vertice, O. Stiriamo OA finchè diventa OA', e sia a il rapporto di OA' a OA; perchè il solido resti sempre

un parallelepipedo rettangolo, tutte le rette parallele ad OA si dovranno stirare nello stesso rapporto. Si otterrà

Fig. 49.

così un parallelepipedo rettangolo, di cui sarà un quadrato soltanto la sezione perpendicolare a OA'.

Ora, stiriamo anche OB, finchè diventa eguale a OB'; sia b il rapporto di OB' a OB, e stiriamo in questo rapporto tutte le rette parallele a OB. Otterremo, in tal modo, un nuovo parallelepipedo rettangolo, di cui soltanto una serie di lati avrà la lunghezza del lato del cubo originario. Finalmente, stiriamo OC finchè diventa eguale a OC', e nel rapporto di OC' a OC, che rappresentiamo con c, stiriamo tutte le rette parallele a OC. Di nuovo si otterrà un parallelepipedo rettangolo; ed ecco dunque che, mediante un'operazione consistente di tre trazioni, il cubo si converte nel solido in discorso. Supposto che il volume del cubo contenga un'unità, è chiaro che quello del solido così formato, ne conterrà abc; e un ragionamento simile a quello che abbiamo fatto nel caso analogo del rettangolo (pag. 136) varrà a dimostrare che $abc = cba = bac$, ossia che l'ordine in cui si moltiplicano tre rapporti è

indifferente. Chiamando la faccia A'C' la *base*, e lo spigolo OB' l'*altezza* del parallelepipedo, *ac* rappresenterà l'area della base, e *b* la misura dell'altezza; e perciò il volume di un parallelepipedo rettangolo è eguale al prodotto della base per l'altezza.

Fig. 50.

Ora, *trasformiamo* il solido considerato, e perciò immaginiamo, in primo luogo, che la faccia BEFG si sposti nel proprio piano, in modo che i suoi lati si mantengano paralleli a sè stessi; ciò che si otterrà, facendo scorrere i punti B ed E rispettivamente lungo BF ed EG, come lungo due guide, per un tratto eguale. Se B'E'G'F' è la nuova posizione di BEFG, si riconoscerà facilmente che i due solidi cuneiformi BEE'B'OC e FGG'F'AD sono perfettamente eguali, essendo rispettivamente eguali le faccie corrispondenti. Per conseguenza, il solido OG', dedotto colla precedente operazione del parallelepipedo rettangolo primitivo, avrà lo stesso volume. Ora, si sposti B'E'F'G' nel proprio piano, facendo scorrere B' ed F' per un tratto eguale, lungo le rette B'E' e F'G', e supponiamo che acquisti la nuova posizione B''E''F''G''. I due solidi in forma di cunei obliqui, B'B''F''F'AO e E'E''G''F'DC, saranno eguali; quindi il volume del solido B''E''G''F'DC, ottenuto con questa seconda

trasformazione, sarà eguale a quello del solido ottenuto colla prima, e, per conseguenza, a quello del parallelepipedo primitivo. Ma, per mezzo di due trasformazioni, simili alle precedenti, la faccia BEGF si potrà trasportare in qualsiasi altra posizione, come B″E″G″F″, posta nello stesso piano, e nella quale i lati conservano le loro primitive direzioni. Quindi, il volume di un parallelepipedo rettangolo non varia, se, mantenendo fissa una delle faccie, si sposta la faccia opposta nel proprio piano, e parallelamente a sè stessa: del resto, in modo qualsivoglia. Da ciò concludiamo che il volume del solido limitato da tre paja di piani paralleli, che si chiama, in generale, un parallelepipedo, è eguale al prodotto dell'area di una delle sue faccie, per la distanza perpendicolare fra questa faccia e l'opposta. Questa, difatti, è la misura del volume del parallelepipedo rettangolo, nel quale il solido considerato si trasforma, per mezzo della precedente operazione, che, come abbiamo veduto, non altera il volume.

Determinato così il volume del parallelepipedo, possiamo facilmente trovare quello del *cilindro obliquo*. Si chiama cilindro retto il solido generato da un'area qualsiasi, che si move parallelamente a sè stessa, in modo che un punto qualunque, P, scorra lungo una retta, PP′, perpendicolare all'area mobile (fig. 51). Il volume di questo solido è misurato dal prodotto dell'altezza PP′ per l'area generatrice. Esso infatti si può concepire come composto di tanti parallelepipedi rettangoli elementari, tutti d'altezza PP′, le cui basi si possono prendere così piccole, da coprire nè più nè meno dell'area ACBD.

Da un cilindro retto si deduce un cilindro obliquo, spostando la faccia A′C′B′D′ nel proprio piano, in modo qual-

sivoglia. Ora, questa operazione non farà che trasformare ogni parallelepipedo rettangolo elementare, come

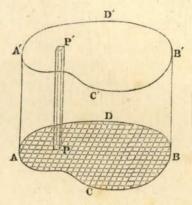



Fig. 51.

PP′, in un parallelepipedo obliquo dello stesso volume. Quindi il volume del cilindro obliquo è lo stesso che quello del cilindro retto al quale si riduce colla precedente trasformazione: e perciò è eguale al prodotto dell'area della base, per la distanza perpendicolare delle sue faccie.

§ 14. *Sulla misura degli angoli.*

Finora si è trattato di quantità d'area o di volume; ora dobbiamo occuparci di quantità d'*angolo*. Nel capitolo sullo spazio (pag. 79) abbiamo detto come gli angoli si potessero misurare col compasso; ma era un metodo di misura puramente relativo, e non ne abbiamo dedotto un'unità assoluta. Noi potevamo immaginare di prendere per unità qualunque apertura del compasso, e rappresentare ogni

altro angolo col suo rapporto a questo angolo particolare, fissato una volta per tutte. Invece, se si misurano gli angoli col metodo di cui passiamo a discorrere, si presenta spontaneamente un'unità, sulla quale gioverà che ci tratteniamo alquanto, perchè, nel capitolo sulla Posizione, ne faremo frequentemente uso.

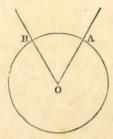



Fig. 52.

Sia AOB un angolo qualunque, e, fatto centro in O, descriviamo, con raggio a, un cerchio, che incontri i lati dell'angolo in A e in B. È chiaro che, se si prendesse un angolo doppio, triplo, o, in generale, eguale ad un multiplo qualunque di AOB, l'arco compreso fra i suoi lati risulterebbe rispettivamente doppio, triplo, o eguale a quello stesso multiplo di AB. Da ciò segue che gli angoli al centro di un circolo variano come gli archi che comprendono; per modo che, se θ, θ' rappresentano due angoli che comprendono rispettivamente gli archi s, s', il rapporto di θ a θ' sarà lo stesso che quello di s a s'. Ora supponiamo che θ' rappresenti quattro angoli retti; allora, s' sarà l'intera circonferenza: ossia, per quanto si è veduto a suo luogo, $2\pi a$. Abbiamo così

$$\frac{\theta}{\text{quattro angoli retti}} = \frac{s}{2\pi a}.$$

Ora, è di estrema importanza che l'angolo, che si sceglie per unità, riesca sempre lo stesso, qualunque sia il circolo sul quale si misura l'arco corrispondente. Questa condizione è soddisfatta, se si prende per unità l'angolo che comprende l'arco eguale al raggio del circolo, cioè l'angolo θ pel quale $s = a$. Quest'angolo, per la precedente proporzione, è eguale a $\frac{1}{2\pi}$ di quattro retti, ossia a $\frac{1}{\pi}$ di due retti, ossia, approssimativamente, a 0, 636 di un retto, per modo che è una frazione costante di angolo retto.

Preso per unità l'angolo così definito, dalla proporzione $\theta : \theta' = s : s'$, segue che θ deve stare all'unità come s al raggio a, per modo che

$$s = a\theta.$$

Quindi, scelto l'angolo unitario in quel modo, ogni altro angolo sarà misurato dal rapporto dell'arco compreso al raggio del circolo. Ma si è visto (pag. 149) che angoli al centro eguali, in circoli diversi, comprendono archi proporzionali ai raggi corrispondenti. Quindi, il rapporto dell'arco compreso da un determinato angolo al centro al raggio sarà lo stesso, qualunque sia il raggio; e, per conseguenza, la precedente misura dell'angolo è *indipendente dal raggio del circolo al quale immaginiamo di riferirci.* Questa è la proprietà principale della così detta *misura circolare* degli angoli, ed è in virtù di essa che questa misura riesce tanto vantaggiosa.

La *misura circolare* di un angolo qualsivoglia, per quanto precede, è il rapporto dell'arco che un angolo eguale, preso al centro di un circolo qualsiasi, intercetta sulla

circonferenza, al raggio del circolo medesimo. Per conseguenza, la misura circolare di quattro angoli retti è il rapporto dell'intera circonferenza al raggio, ossia $\frac{2\pi a}{a}$, o finalmente 2π. Così, quella di due retti è π, quella di un retto, $\frac{\pi}{2}$, quella di tre retti $\frac{3\pi}{2}$, e via discorrendo.

§ 9. *Sulle potenze frazionarie.*

Prima di abbandonare lo studio della quantità, converrà che ritorniamo sull'argomento delle potenze, che abbiamo sfiorato nel capitolo sul Numero (pag. 18).

Ivi abbiamo introdotto il simbolo a^n per rappresentare il risultato, che si ottiene, moltiplicando a n volte per sè stesso. Da questa definizione si deduce facilmente l'identità:

$$a^n \times a^p \times a^q \times a^r = a^{n+p+q+r}.$$

Difatti, il primo membro esprime che a si deve moltiplicare n volte per sè stesso, quindi il risultato così ottenuto si deve moltiplicare per a^p, ossia per a moltiplicato p volte per sè stesso, e così via: per modo che si potrà rappresentare anche così:

$$\begin{array}{l} (a \times a \times a \times a \ldots n \text{ fattori}) \\ \times (a \times a \times a \times a \ldots p \quad \text{»} \quad) \\ \times (a \times a \times a \times a \ldots q \quad \text{»} \quad) \\ \times (a \times a \times a \times a \ldots r \quad \text{»} \quad). \end{array}$$

Ora, è chiaro che ciò fa lo stesso come $(a \times a \times a \times a \ldots$

$n+p+q+r$ fattori), che, per la precedente definizione, non è altro che $a^{n+p+q+r}$.

Se b è tal quantità che $b^n = a$, b si chiama la *radice* n^{ma} di a: ciò che si esprime simbolicamente colla scrittura $b = \sqrt[n]{a}$. Così, poichè $8 = 2^3$, 2 è la radice terza, o cubica, di 8; e poichè $243 = 3^5$, 3 si chiama la radice quinta di 243.

Ciò premesso, rammentiamo che, in fine al primo capitolo, abbiamo veduto quanto riesca istruttivo, in molti casi, estendere il significato dei simboli. Vediamo, se, per avventura, si può generalizzare il significato di a^n. Questo simbolo cessa d'avere un senso qualsiasi, quando n è una frazione, o è negativo. È ovvio che moltiplicare una quantità per sè stessa un numero frazionario, o un numero negativo, di volte sono parole senza senso. Quindi, supposto n frazionario o negativo, volendo adattare ad a^n il significato stabilito dalla definizione originaria, che suppone n intero e positivo, si cade nell'assurdo. Ma, perciò, a^n, in questi casi, non è suscettibile d'alcuna interpretazione?

In sì fatto caso, noi ricorreremo alle proprietà che il simbolo possiede, in virtù della sua originaria definizione, e procureremo di stabilirne il significato, in modo che le conservi. La proposizione fondamentale della teoria delle potenze intere è che

$$a^{n+p+q+r+\cdots} = a^n \times a^p \times a^q \times a^r \times \ldots:$$

relazione valida, qualunque sia il numero delle quantità n, p, q, r. Ora, si tratti di interpretare il simbolo $a^{\frac{l}{m}}$ dove $\frac{l}{m}$ rappresenta una frazione. Perciò, ammettiamo che questo

simbolo soddisfaccia alla precedente relazione: e, per determinarne il significato, supponiamo che sia $n = p = q = r = \ldots = \frac{l}{m}$, e che queste quantità siano in numero di m. Allora,

$$n + p + q + r = m \times \frac{l}{m} = l;$$

donde

$$a^l = a^{\frac{l}{m}} \times a^{\frac{l}{m}} \times a^{\frac{l}{m}} \times \ldots m \text{ fattori.}$$
$$= \left(a^{\frac{l}{m}}\right)^m.$$

Quindi $a^{\frac{l}{m}}$ dev'essere tal quantità, che, moltiplicata m volte per sè stessa, dia a^l. Ma, per la definizione precedente (pag. 170), una quantità, che, moltiplicata m volte per sè stessa, dà a^l, è una radice m^{ma} di a^l. Concludiamo che $a^{\frac{l}{m}}$ rappppresenta una radice m^{ma} di a^l, o, colle note abbreviature,

$$a^{\frac{l}{m}} = \sqrt[m]{a^l}.$$

Così, dal teorema fondamentale delle potenze si è dedotto un significato, che possiamo attribuire ad a^n, quando n è una frazione.

Dallo stesso teorema si deduce altrettanto facilmente un significato, che allo stesso simbolo possiamo attribuire, nel caso che n sia una quantità negativa.

Per quel teorema, $a^n \times a^p = a^{n+p}$. Ora, per interpre-

tare a^{-n}, supponiamo che sia $p = -n$. Troviamo così $a^n \times a^{-n} = a^{n-n} = a^0 = 1$ (per ciò che si è veduto a pag. 36). Di qui, dividendo per a^n, si ricava

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n};$$

cioè a^{-n} è la quantità, che, moltiplicata per a^n, dà per prodotto l'unità, o, come si suol dire, a^{-n} è la quantità *inversa* di a^n. Così, per esempio, qual'è l'inversa di 4? Evidentemente, 4 si deve moltiplicare per $\frac{1}{4}$ per ottenere per prodotto l'unità. Quindi $4^{-1} = \frac{1}{4}$. E, poichè $4 = 2^2$, 2^{-2} è l'*inversa* di 4, o di 2^2.

La teoria completa delle potenze intere, frazionarie e negative, altrimenti chiamata teoria degli esponenti, ha non piccola importanza nello studio matematico delle quantità simboliche. Ma, la trattazione di questo argomento ci obbligherebbe a scostarci troppo dai limiti di quest'opera. Qui ne abbiamo esposto quel poco che basta perchè il lettore possa intendere quella parte del seguente capitolo, dove si fa uso di potenze frazionarie.

CAPITOLO IV.

POSIZIONE

---

§ 1. *Ogni posizione è relativa.*

Al lettore sarà certamente accaduto qualche volta che un forestiero lo fermasse per via, per rivolgergli una domanda di questo genere: « Mi sapreste dire dov' è l'Albergo Milano? » — « Che strada debbo tenere per andare al Duomo? » — « Dov' è la via Alessandro Manzoni? » Comunque si possa rispondere a tali domande, la risposta potrà sempre riassumersi in questa: La strada, l'edificio domandato è *Là*. E in tal modo se ne indicherà la *posizione*.

Questo *là*, in pratica, si spiegherà con una certa frase; per esempio, così: « Andate avanti dritto, poi voltate per la prima via a destra, quindi per la seconda a sinistra, e, a cento metri, troverete l'Albergo Milano. »

Esaminiamo la domanda e la risposta. « Dov' è l'Albergo Milano? » Per disteso si dovrebbe dire: « Che strada debbo tenere, per andare di *qui* » (cioè dal luogo, dove si suppone fatta la domanda) « all'Albergo Milano? »; e ciò è quanto significa quella domanda.

Ora, se si rispondesse al forestiero che il « Milano » si trova a cinquanta passi dalla Chiesa di San Francesco, in via Alessandro Manzoni, questa indicazione non gli servirebbe a nulla, a meno che non sapesse dov'è quella chiesa, o, per lo meno, quella via. E altrettanto vano sarebbe rispondergli: Il « Milano » si trova in fondo a via del Monte Napoleone, se egli non sapesse dov'è posta quest'altra via.

Pure, queste proposizioni, in un certo senso, rispondono, l'una e l'altra, all'interrogazione « Dov'è il « Milano »? » In vista della Chiesa di San Francesco, o in via del Monte Napoleone, il *là* si dovrebbe indicare in tal modo. Si vede così che l'interrogazione *dove?* ammette un'infinità di risposte, corrispondenti alle infinite posizioni possibili — o, se vuolsi, ai possibili *qui* — di chi la rivolge. Il *dove* suppone sempre un certo *qui*, per rispetto al quale la posizione richiesta dev'essere determinata. Il lettore riconoscerà immediatamente che domandare « Dov'è il « Milano »? » senza intendere « Dov'è, per rispetto a qualche altro determinato luogo? » è fare una domanda, che non ha più senso di questa: « Che strada devo tenere per andare dal « Milano » a un luogo qualsiasi? », non alludendo ad alcun luogo speciale.

Da queste osservazioni si ricava la prima proposizione generale, intorno alla posizione. Noi non possiamo indicare il *dove* di un luogo, o di un oggetto, se non indicando come vi si può arrivare, partendo da un luogo, o da un oggetto, determinato. Il suo *dove* si determina per rispetto ad un *qui*. Ciò si esprime, in poche parole, dicendo che « Ogni posizione è relativa. »

Nello stesso modo che la posizione dell'Albergo Milano

è puramente relativa agli altri fabbricati della città, e quella della città stessa, alle altre città, la posizione di un corpo qualunque dello spazio non è che relativa agli altri corpi. Discorrere della posizione della terra, nello spazio, non ha senso, a meno che non si pensi, in pari tempo, a quella del sole, o di Giove, o di una stella, o, in somma, a quella di qualche altro corpo celeste.

Questa proprietà si chiama talvolta l' « uniformità dello spazio. » Tale espressione significa puramente che nello spazio non vi è nulla, che i nostri sensi possano percepire, che valga a determinare la posizione (*). Un gran foglio di carta bianca, sul quale siano disposti tanti oggetti, ci fornisce un'immagine dello spazio; e fissare la posizione di un corpo nello spazio è un' operazione in certo qual modo simile a distinguere un oggetto su questo foglio: operazione, che suppone la coesistenza di almeno due oggetti: e, riducendosi a determinare un *questo* e un *quello*, un *qui* e un *là*, implica il concetto di posizione relativa.

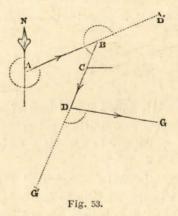
§ 2. *La posizione si può determinare per mezzo di passi diretti.*

Dalla domanda « Dov'è il « Milano »? » passiamo alla risposta: « Andate avanti dritto, poi voltate per la prima via a destra, quindi per la seconda a sinistra, e, a cento metri, troverete il « Milano ». »

« Andate avanti dritto » significa di seguitare per la strada, dove s'immagina fatta la domanda, nella direzione (« avanti ») in cui il forestiero era già incamminato, op-

(*) Su questo punto ritorneremo in seguito.

pure in un'altra, indicata dalla mano. Supposto che le vie non sian curve, ciò torna a dire « Tenete una certa direzione. » Fin dove? A ciò risponde la seconda indicazione: Poi voltate per la prima via a destra. Più precisamente, supposto che questa via si trovi a 50 metri, si potrebbe dire: Tenete questa direzione per 50 metri. Nell'annessa figura, ciò è rappresentato dal passo AB, dove A è la posizione nella quale s'immagina fatta la domanda. In B il forestiero deve voltare a destra, e, secondo la terza indicazione, deve passar oltre la prima via a sinistra, in C, e prendere la seconda, in D. Più precisamente, si sarebbe potuto indicare la distanza BD, che supporremo di 80 metri. Allora, la seconda e la terza indicazione, combinate insieme, torneranno a questa: Da B seguite per 80 metri una certa direzione, cioè BD. Per definire esattamente questa direzione, BD, per rispetto alla primitiva, AB, si può fare

Fig. 53.

nel seguente modo. Se il forestiero, giunto in B, invece di cambiar direzione, andasse avanti diritto, per altri

80 metri, arriverebbe al punto D'. Perciò, misurato che sia l'angolo D'BD, formato dalla via, dove si suppone fatta la domanda, colla prima via a destra, facendo girare BD', intorno a B, dell'angolo D'BD, riuscirà determinata la direzione di BD, e, ad un tempo, la posizione di D. Ricorrendo alla stessa rappresentazione, di cui ci siamo valsi per definire la misura positiva e negativa delle aree (pag. 157), l'angolo D'BD maggiore di due retti, è l'angolo di cui BD' deve girare in senso contrario a quello degl'indici dell'orologio, per prendere la posizione BD'. Per brevità, indichiamo questo angolo con β, e inventiamo un simbolo, $\{\beta\}$, per indicare l'operazione: far girare la direzione in cui si cammina di un angolo β, in senso contrario a quello degl'indici dell'orologio. Valendosi del simbolo $\pi/2$, per rappresentare l'angolo retto, si avranno le indicazioni simboliche seguenti:

$\{0\}$ = Andar avanti dritto.
$\{\pi/2\}$ = Girare ad angolo retto a sinistra.
$\{\pi\}$ = Fare un mezzo giro.
$\{3\pi/2\}$ = Girare ad angolo retto a destra.

Così, l'angolo che figura nell'operazione simbolica è minore di due retti, quando, partendo dalla direzione primitiva, AB, si volta a sinistra, ed è maggiore di due retti, quando si volta a destra.

Se il nostro forestiero, invece che in D, dovesse andare in D', farebbe 50 metri per arrivare in B, poi altri 80 per arrivare in D': e farebbe così, percorrendo il tratto AB + BD', 50 metri + 80 metri. Per indicare che, giunto in B, egli deve voltare, ci vagliamo dell'operatore di rotazione $\{\beta\}$,

che poniamo davanti agli 80 metri, che devono essere percorsi nella nuova direzione; e colla scrittura $50 + \{\beta\} 80$ rappresentiamo l'indicazione: Camminate per 50 metri in una certa direzione AB, poi girate di un angolo β in senso contrario a quello degl'indici dell'orologio, e, nella nuova direzione, fate altri 80 metri.

Ora abbiamo tutto quello che occorre, per dare l'espressione simbolica completa delle indicazioni, che serviranno al forestiero per trovare l'Albergo Milano. La quarta indicazione è: In D voltate a sinistra, e fate 100 metri nella direzione così determinata. Rappresentiamo con DG' 100 metri misurati secondo il prolungamento di BD; allora, dobbiamo far girare DG', in senso contrario a quello degl'indici dell'orologio, di un angolo G'DG, finchè prende la posizione DG, e G sarà la posizione del « Milano. » Rappresentiamo l'angolo G'DG con γ. L'indicazione in discorso sarà espressa da $\{\gamma\}$ 100. Quindi, la spiegazione complessiva si potrà rappresentare simbolicamente colla scrittura

$$50 + \{\beta\} 80 + \{\gamma\} 100,$$

dove i numeri esprimono altrettanti metri.

Ma vogliamo che nella nostra spiegazione simbolica le vie non figurino più come un mezzo necessario per definire la direzione; poichè, nella precedente, i primi 50 metri si devono fare nella *via,* dove s' immagina fatta la domanda. Per sbarazzarci di questa via, basta che ne supponiamo determinata la direzione dall' angolo di cui deve girare un indice d' orologio, in senso inverso, per raggiungere la direzione stessa, partendo da qualche altra direzione, fissa, o scelta a piacere. Immaginiamo, per

esempio, che il forestiero abbia con sè una bussola, e sia AN la direzione dell' ago magnetico, nel punto A. Allora, la posizione della via AB si potrà definire come una direzione, che segna un certo numero di gradi a est dal nord: o, per attenerci al solito metodo, si potrà determinare per mezzo dell'angolo α, di cui l'ago dovrebbe girare, attraverso owest e sud, per raggiungere la posizione AB. In tal caso, interpreteremo la notazione $\{\alpha\}\,50$ così: Fate 50 metri nella direzione, che forma col nord un angolo, misurato attraverso owest, eguale ad α.

L'espressione simbolica

$$\{\alpha\}\,50 + \{\beta\}\,80 + \{\gamma\}\,100$$

della nostra risposta è, come si voleva, completamente liberata da ogni idea di vie. Essa spiega come si possa passare da A in C, senza ricorrere ad alcuna circostanza locale; e definisce la posizione di G per rispetto ad A in modo puramente geometrico, ossia, per mezzo di *passi diretti*. Difatti, tradotta in linguaggio comune, significa: Dal punto A di un piano, fate un passo, AB, di 50 unità, in una direzione formante un angolo α, con una direzione fissa; da B fate un passo BD, di 80 unità, formante col precedente, AB, l'angolo β; finalmente, da D fate un passo, DG, formante l' angolo γ con BD. Tutti questi angoli s' intendono misurati in senso contrario a quello degl' indici dell' orologio, nel modo che fu precedentemente spiegato.

§ 3. *Addizione dei passi diretti o vettori.*

Confrontando l'indicazione simbolica

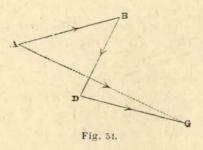
$$\{\alpha\}\,50 + \{\beta\}\,80 + \{\gamma\}\,100$$

coll'annessa figura, si vede che $\{\alpha\}$ 50 rappresenta il passo AD, considerato come definito da una certa *direzione*, oltre che da una certa grandezza. Similmente dobbiamo intendere che BD e DG rappresentino, oltre un numero, una direzione determinata, vale a dire che siano, come AB, passi aventi una certa direzione, o, come vogliamo chiamarli, *passi diretti*. A questa condizione, modificando cioè il primitivo significato di un segmento come AB, BD, DG, e del segno $+$, potremo sostituire alla nostra spiegazione simbolicamente espressa

$$\{\alpha\}\,50 + \{\beta\}\,80 + \{\gamma\}\,100,$$

l'espressione geometrica equivalente

$$AB + BD + DG.$$

Fig. 51.

I concetti di quantità e d'addizione ricevono così un nuovo e più esteso significato. AB $+$ BD $+$ DG non significa più che si deve aggiungere il numero di unità contenuto in BD, a quello contenuto in AB, e quello contenuto in DG alla somma di essi, ma indica che si deve descrivere un passo AB in una certa *direzione*, quindi un passo BD,

partendo dal termine di esso, in un'altra direzione determinata, e finalmente un terzo passo DG, egualmente in una data direzione, partendo dal termine D del secondo. Il risultato dell'operazione è di condurci da A in G. Ora è chiaro che si passa egualmente da A in G, mediante il passo diretto AG. Quindi, attribuendo al vocabolo «eguale», e al segno corrispondente =, un significato più esteso, adoperandoli per indicare l'eguaglianza dei risultati di due operazioni, potremo scrivere

$$AG = AB + BD + DG,$$

espressione che va letta: AG è eguale alla somma di AB, BD e DG.

I passi come quelli che abbiamo considerato nel capitolo sulla quantità, che, se si rammenta, erano grandezze segnate lungo una retta tracciata ad arbitrio, si chiamano passi *scalari*, perchè non dipendono che dalla scala in cui si rappresenta una certa quantità. I passi scalari si sommano, e si sottraggono, disponendoli l'uno di seguito all'altro, secondo una retta *qualsivoglia* (vedi il § 2 del Capitolo III).

Un passo che ha *direzione*, non che grandezza, si chiama un passo *vettore*, perchè ci *trasporta* da una *posizione* dello spazio ad un'altra. Il senso in cui si deve prendere il passo si suol indicare per mezzo di una freccia. Per esempio, nella fig. 54, il passo AB, si deve descrivere da A in B, e, per indicar ciò, la punta della freccia è volta verso B. Colle lettere, la stessa cosa si indica, scrivendo A prima di B.

Il metodo, col quale siamo arrivati al concetto di passi

vettori, mostra a prima vista, come i passi medesimi si debbano sommare. I passi vettori si sommeranno, disponendoli l'uno di seguito all'altro, ciascuno nella propria direzione, e in modo che un punto, il quale scorra lungo il zigzag così formato, si mova sempre nella direzione indicata dalle freccie: ciò che si esprime in poche parole, dicendo che i passi si devono disporre in *senso continuo.* Allora, la somma dei passi vettori considerati, è il passo diretto che congiunge l'origine del zigzag col suo termine.

Siano *ab*, *cd*, *ef* e *gh* (fig. 55) altrettanti passi diretti.

Fig. 55.

Descriviamo AB eguale e parallelo ad *ab:* quindi da B, BC eguale e parallelo a *cd:* poi, da C, CD eguale e parallelo ad *ef:* e, finalmente, da D DE eguale e parallelo a GH. Così, il nostro zigzag è tracciato in modo che le freccie si succedono tutte « in senso continuo. » Quindi il passo diretto AB sarà la somma dei quattro vettori dati. Supposto, per esempio, che da C si spicchi il passo CD', eguale e parallelo ad *ef*, come CD, ma dalla parte opposta di BC, e si conduca poi D'E' eguale e parallelo a *gh*, il lettore ri-

conoscerà a colpo d'occhio che, in questo caso, le freccie in BC, CD' e D'E' non si succedono in senso continuo, per modo che in C non si piglia la direzione giusta.

Quando tutti i vettori hanno la stessa direzione, è chiaro che il zigzag si riduce ad una retta; e perciò, in questo caso, i passi vettori si sommano come le quantità scalari. Segue da ciò che, quando i passi vettori si possono considerare come scalari, il nostro concetto più esteso di addizione prende l'ordinario significato aritmetico.

Possiamo ora enunciare una qualità importantissima della posizione, considerata in un piano: cioè che, se la posizione di G per rispetto ad A è rappresentata dal passo diretto AG, essa sarà anche rappresentata dalla somma di un numero qualsiasi di passi diretti, il primo dei quali ha l'origine in A, mentre l'ultimo ha il termine in G, (vedi la fig. 56). Ciò è simbolicamente espresso dalla relazione:

$$AG = AB + BC + CD + DE + EF + FG.$$

Riprendendo l'esempio di poco fà, è chiaro che avremmo potuto dirigere il nostro forestiero all'Albergo Milano, per mezzo di una serie d'indicazioni completamente diverse dalle precedenti: facendogli fare, per esempio, lunghi giri, dentro e fuori della città, prima d'arrivare al luogo domandato. Ma, comunque egli possa arrivare in G, il risultato finale del suo cammino sarà sempre di raggiungere quel punto a cui arriverebbe, facendo il passo AG, fatta astrazione dagli ostacoli, o, come si suol dire, a volo d'uccello.

Apparisce da ciò che, in virtù del concetto più esteso

di addizione, due qualunque zigzag di passi diretti, ABCDEFG e A'B'C'D'E'F'G' (che potranno anche contenere un numero diverso di passi componenti), i quali cominciano entrambi

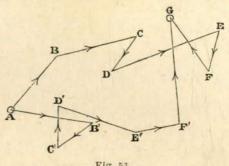



Fig. 53.

in uno stesso punto, A, e finiscono in uno stesso punto G, si devono considerare come indicazioni equivalenti; vale a dire, si deve porre

$$AB + BC + CD + DE + EF + FG = AG = AB' + B'C' + C'D' + D'E' + E'F' + F'G.$$

In altre parole, due distinte serie di passi diretti hanno egual somma, quando, partendo da un'origine comune, e sommando i passi dell'una e dell'altra a modo di vettori, il termine risulta per entrambe lo stesso.

Ora supponiamo che il forestiero domandasse la strada per andare al « Milano, » mentre si trovava, senza saperlo, in faccia a quell'albergo, e che la persona, alla quale si è rivolto, gli desse indicazioni esatte: ma, facendolo voltare, a destra e a sinistra, per una serie di vie opportunamente combinata, lo mandasse un buon tratto

lontano, in giro per la città, prima di ricondurlo al punto A, donde è partito. In questo caso, il « Milano » si dovrà supporre, non più in G, ma in A. Il risultato di quel giro, essendo di ricondurre il forestiero al punto di partenza, sarà debitamente rappresentato da un passo nullo; e, per conseguenza, porremo (fig. 56).

$$AB + BC + CD + DE + EF + FG + GA = 0 : \ldots \quad (1)$$

eguaglianza, che, tradotta in parole, significa: La somma di tanti passi vettori, che formano i successivi lati di un zigzag chiuso è zero. Ora, si è precedentemente trovato che

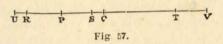
$$AB + BC + CD + DE + EF + FG = AG \ldots \quad (2)$$

Quindi, perchè le due relazioni (1) e (2) sussistano insieme, dev'essere — GA eguale ad AG, ossia

$$AG + GA = 0.$$

Questa relazione esprime puramente che, se si passa da A a G, poi da G ad A, l'operazione complessiva si riduce ad un passo nullo. Ma è notevole la conclusione che se ne deduce, che se si considera il passo da A a G come positivo, il passo da G ad A si deve considerare come *negativo.*

Dello stesso risultato ci possiamo anche valere, per ridurre la sottrazione dei vettori all'addizione. Difatti, chiamando l'operazione rappresentata da AB — DC *sottrazione* dei vettori AB e DC, poichè DC + CD = 0, l'operazione in

Fig. 57.

discorso torna a sommare i vettori AB e CD, e si riduce

quindi ad AB + CD. Segue da ciò che, per sottrarre un vettore da un altro, basta invertirne il segno, e aggiungerlo.

La relazione AG + GA = 0 si potrà estendere immediatamente a un numero qualunque di punti posti sopra una retta. Così, se PQRSTUV è una serie si fatta di punti,

$$PQ + QR + RS + TU + UV + VP = 0.$$

Difatti, partendo da P, e descrivendo successivamente i passi indicati, è chiaro che si ritornerà di nuovo in P: per modo che si eseguirà un'operazione il cui risultato è nullo, ossia equivalente a restare al punto di partenza.

§ 4. *L'addizione dei vettori soddisfà alla legge commutativa.*

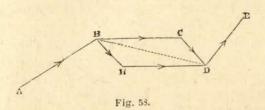
Ora dimostreremo che la legge commutativa (pag. 5) sta anche per l'addizione generalizzata. A tal fine, consideriamo, in primo luogo, il caso di due passi consecutivi. Abbiansi quattro passi successivi AB, BC, CD e DE; e da B segniamo il passo BH, in grandezza, direzione e senso, eguale a CD, e il passo HD, che conduce da H in D. Confrontando i due cammini che conducono da B in D, abbiamo

$$BC + CD = BD = BH + HD.$$

D'altra parte, congiunto B con D, i due triangoli BHD e DCB hanno gli angoli in B e in D eguali, poichè formati dalla retta BD colle due parallele BH e CD, il lato BD comune, e BH, per costruzione, eguale a CD; quindi, hanno la stessa grandezza e la stessa forma, donde segue che HD e BC sono eguali: e, poichè sono eguali gli angoli BDH e DBC,

anche paralleli. Per conseguenza, il passo HD è, in grandezza, senso e direzione, eguale a CD: e, rammentando che sono parimente eguali i passi BH e CD, dalla precedente eguaglianza deduciamo

$$BC + CD = CD + BC:$$

Fig. 53.

donde apparisce che due passi consecutivi si potranno sempre scambiare di posto.

Riconosciuta questa proprietà, un ragionamento affatto simile a quello che abbiamo tenuto a pag. 12, varrà a mostrare che, mediante una serie di scambii di passi consecutivi, si potranno scambiare di posto due passi qualunque del zigzag; e da ciò concludiamo che l' ordine in cui si sommano i vettori non influisce sul risultato.

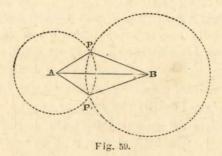
La geometria dei vettori trae la sua importanza dal fatto che molte quantità fisiche si possono rappresentare per mezzo di passi diretti. Nel capitolo seguente, vedremo che le velocità e le accelerazioni sono quantità di questa natura.

§ 5. *Sui metodi di determinare la posizione in un piano.*

A suo luogo abbiamo osservato che le quantità scalari si possono riguardare come passi misurati lungo una retta

qualsiasi (pag. 120). Dato un punto di questa retta, è chiaro che, per determinare la posizione relativa di qualunque altro, basterà indicare la grandezza del passo compreso fra esso e il punto fisso. Quindi, in una retta, un punto basta per determinare la posizione relativa di tutti gli altri. Questa proprietà si pone per definizione di ciò che si dice uno spazio ad *una* dimensione; e, da quel punto di vista, così si chiama ogni linea.

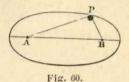
Invece, quando si tratta della posizione di punti appartenenti ad un piano, per determinare il posto occupato da un punto, P, per rispetto ad un altro, A, la grandezza del passo AP non basta: occorre anche la *direzione*. Perciò, i passi vettori sono, per lo spazio piano, ciò che i passi scalari per lo spazio ad una dimensione. Per defi-

Fig. 59.

nire la *direzione* del passo AP, bisognerà conoscere almeno un altro punto, B, del piano. Uno spazio in cui occorrono due punti, per determinare la posizione di un terzo, si suol chiamare a *due* dimensioni. Per tradurre in atto questa determinazione, servono varii metodi generali. Accenneremo qui ad alcuni pochi, limitandoci però al caso del piano, ossia dello spazio a due dimensioni, che presenta la stessa forma da entrambe le parti.

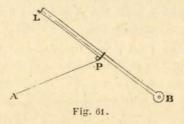
(α) In primo luogo, potremo misurare le mutue distanze di A e P, e di B e P. Rappresentando con r ed r' la loro grandezza scalare, ad ogni coppia di valori di r e di r' corrisponderanno due punti; e cioè le intersezioni, P e P', dei due circoli, che hanno per centro i punti A e B, e raggio rispettivamente eguale ad r e ad r'. L'uno dei due punti cadrà al di sopra, e l'altro al di sotto di AB; e di questa circostanza ci possiamo valere per distinguerli. Fa eccezione il caso che i due circoli si tocchino, nel quale i due punti coincidono. Quando non s' incontrano, non determineranno più alcun punto.

Se P si move in modo che le quantità r ed r', in ogni posto da esso occupato per rispetto ad A e B, soddisfacciano a una determinata relazione, si otterrà una serie continua di punti del piano, ossia una certa curva.

Per esempio, se fissati i capi di un filo di lunghezza l a due spilli appuntati nel piano del foglio, in A e in B, si farà scorrere una matita in modo che la sua punta P prema

Fig. 60.

sul foglio, e, in pari tempo, mantenga teso il filo APB, la matita traccierà quell'ombra del circolo, alla quale abbiamo dato il nome di ellisse. In questo caso, si ha $r + r' = AP + PB = l$, lunghezza del filo, che rimane sempre la stessa; e questa è un'equazione fra le quantità scalari r, r' ed l, che sta per ogni punto dell'ellisse, ed esprime una proprietà metrica della curva per rispetto ai punti A e B.

Invece, se si farà movere P in modo che la differenza di AP e di BP sia una lunghezza costante ($r - r' = l$), si disegnerà la curva, che abbiamo chiamato iperbola. Si può ottenere che un punto P si muova in quel modo, per mezzo di un meccanismo semplicissimo. Supponiamo d'avere un regolo BL, capace di girare intorno ad uno de'suoi estremi, B; e fissiamo un filo di determinata lunghezza all'altro estremo L, e al punto fisso A. Allora, se, mentre si farà girare il regolo intorno a B, vi si manterrà aderente il filo, per mezzo della punta, P, di una matita, questa traccierà l'iperbola. Difatti, poichè LP + PA ed LP + PB sono

Fig. 61.

rispettivamente eguali alla lunghezza del filo, e a quella del regolo, entrambe invariabili, la loro differenza, ossia PA — PB, si manterrà eguale alla lunghezza costante, che ne rappresenta la differenza.

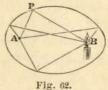



Fig. 62.

I punti A e B, così nel caso dell'ellisse, come in quello

dell' iperbola, si chiamano *fuochi*. Questo nome trae origine dalla seguente notevole proprietà. Supponiamo che un pezzo di molla d' orologio, ben lucido, sia piegato in forma d' ellisse, in modo che ai fuochi si trovi affacciata la parte piatta. Allora, se nel foco B si porrà un corpo ardente, tutti i raggi di calore e di luce irradiati da B e raccolti dalla molla si concentreranno in A; donde segue che A sarà molto più caldo e più lucente d'ogn'altro punto abbracciato dall'ellisse (escluso, naturalmente, il punto B). Questa proprietà degli archi d'ellisse e d'iperbola dipende dal fatto che AP e BP formano in P angoli eguali colla curva: mentre, per una nota legge fisica, i raggi di calore e di luce incontrano e abbandonano una superficie riflettente sotto angoli eguali.

Una terza curva notevole, a cui si è naturalmente condotti da questo primo metodo di determinare la posizione, è la lemniscata di Giacomo Bernoulli (dal latino *lemniscus*, che significa nastro). Questa linea è tracciata da un punto P, che si move in modo che l'area del rettangolo contenuto dalle sue distanze da A e da B sia costantemente eguale a quella di un certo quadrato ($r \, . \, r' = c^2$). Se questo qua-

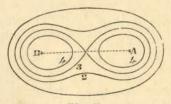



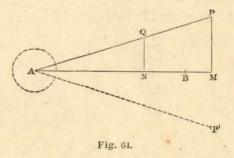
Fig. 63.

drato è più grande di quello che ha per lato la metà di AC, è chiaro che P non potrà cadere fra A e B; se i due

quadrati sono eguali, la lemniscata ha la figura di un otto; se il primo è minore del secondo, la linea si scinde in due ovali. L'annessa figura rappresenta una serie di lemniscate. Una serie di curve ottenuta variando una costante, come, nel caso presente, il quadrato, si chiama una *famiglia di curve*. Siffatte famiglie di curve, nella trattazione dei problemi fisici, si presentano costantemente.

§ 6. *Coordinate polari.*

(β) I punti A e B determinano una retta, la cui direzione è AB. Nota la lunghezza della retta AP, e l'angolo BAP, formato da essa colla precedente, è chiaro, che, per mezzo di queste quantità, si potrà fissare la posizione di P. Sia r il numero d'unità lineari, e θ quello d'unità angolari, contenuti rispettivamente in AP e in BAP, dove r e θ, naturalmente, potranno essere anche frazioni. Nel misurare l'angolo θ, adotteremo la stessa convenzione che abbiamo fatto a suo luogo (pag. 157), trattando delle aree.

Fig. 64.

L'angolo rappresentato dal numero positivo θ sarà quello che descrive una retta, la quale, partendo dalla posizione

AB, gira intorno al punto A, come intorno ad un perno, in senso contrario a quello degl'indici dell'orologio, finchè prende la direzione AP. Invece, gli angoli descritti nel senso degli indici dell'orologio, allo stesso modo delle aree, si considereranno come negativi. Così, l'angolo BAP′, al di sotto di AB, si ottiene facendo girare AB, finchè prende la direzione di AP′, in quest'ultimo senso: e, per conseguenza, dev'essere calcolato come negativo.

Ora, osserviamo che la retta AB potrà raggiungere egualmente la direzione AP′, mediante una rotazione in senso contrario a quello degl'indici dell'orologio, descrivendo l'angolo, che, nella figura, è indicato dall'arco di circolo punteggiato. Similmente, essa potrà raggiungere la direzione AP, girando nel senso degl'indici dell'orologio; e, in tal modo, il punto P riuscirà definito da un angolo negativo. Finalmente, la retta in discorso, raggiunta la direzione AP, in un modo o nell'altro, potrà compiere un certo numero di rivoluzioni complete intorno ad A, in un senso, o nell'altro; e, qualunque sia questo numero finirà sempre per prendere la stessa direzione AP.

Segue da ciò che una retta, che inizialmente coincide con AB, si potrà ridurre a coincidere con AP, facendola girare intorno ad A, in quattro modi diversi, e cioè:

1. Con una rotazione da AB in AP, in senso contrario a quella degli indici dell'orologio.

2. Con una rotazione da AB in AP nel senso degl'indici dell'orologio.

3. Colla prima rotazione, composta con un numero qualunque di rivoluzioni complete, intorno ad A, in un senso, e nell'altro.

4. Colla seconda rotazione, composta con un numero

qualunque di rivoluzioni complete, intorno ad A, in un senso, e nell'altro.

La retta AB, che segna la posizione originaria della retta considerata, si chiama retta *iniziale:* la lunghezza AP si chiama *raggio vettore* (perchè trasporta il punto P alla posizione richiesta): l'angolo BAP, descritto dal raggio vettore, per passare da AB alla posizione voluta AP, si chiama *angolo vettoriale:* A si dice il *polo*, perchè è l'estremo dell'asse intorno al quale si può immaginare che giri il raggio. Finalmente, AP ($= r$), e l'angolo BAP ($= \theta$), si chiamano *coordinate polari* del punto P, perchè determinano la posizione del punto P, per rispetto al polo A, e alla retta iniziale AB.

§ 7. *I rapporti trigonometrici.*

Sia PM la perpendicolare abbassata da P sulla retta AB (fig. 64). Ai rapporti dei lati del triangolo rettangolo PAM, per ragione di brevità di linguaggio, si sono attribuiti nomi speciali.

$\frac{PM}{AP}$, rapporto della perpendicolare all'ipotenusa, si chiama il *seno* dell'angolo BAP.

$\frac{AM}{AP}$, rapporto della base all'ipotenusa, si chiama il *coseno* dell'angolo BAP.

$\frac{PM}{AM}$, rapporto della perpendicolare alla base, si chiama la *tangente* dell'angolo BAP.

$\frac{AM}{PM}$, rapporto della base alla perpendicolare, si chiama la *cotangente* dell'angolo BAP.

Conformemente a questi nomi, se θ è la grandezza scalare dell'angolo BAP, i quattro rapporti, per brevità di scrittura, si rappresentano con $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$, e $\cot\theta$.

Ora, sia Q un altro punto di AP, e caliamo QN perpendicolare ad AB (fig. 64). I triangoli QAN e PAM hanno la stessa forma (v. pag. 128); quindi i rapporti dei lati corrispondenti dell'uno e dell'altro sono eguali; e, in particolare,

$$\frac{PM}{AP} = \frac{QN}{AQ}, \frac{AM}{AP} = \frac{AN}{AQ}, \frac{PM}{AM} = \frac{QN}{AN}, \frac{AM}{PM} = \frac{AN}{QN};$$

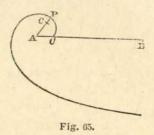
donde apparisce che $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$ e $\cot\theta$ non dipendono dal posto occupato dal punto P sulla retta AP, ma solo dalla grandezza dell'*angolo* BAP o θ.

Questi rapporti (con voce greca, che significa *attinente alla misura dei triangoli*) si chiamano rapporti trigonometrici dell'angolo θ. I nomi coi quali li abbiamo distinti, sono termini antichi, con cui si richiamava la figura presentata da un arciere, che tiene applicato al seno la corda dell'arco. La *trigonometria*, trattato dei rapporti trigonometrici, forma un importante ramo delle matematiche pure (*).

(*) L'angolo BAP nella figura fu preso *minore* di un retto; ma potrà ricevere qualunque grandezza. Ora, si è trovato utile di fare sul *segno* della perpendicolare PM, e della base AM, le convenzioni seguenti. PM si considera come positivo, quando cade al di sopra della retta iniziale AB, e negativo, quando cade al di sotto; AM si considera come positivo, quando M cade a destra di A, e negativo, quando invece cade a sinistra. Il lettore apprezzerà meglio l'importanza di queste convenzioni, quando avrà veduto i §§ 11 e 12.

§ 8. *Sulle spirali.*

Supponiamo che il raggio AP giri intorno al polo A, e che, mentre gira, il punto P scorra lungo di esso, in modo che la grandezza r di AP sia sempre collegata da una certa relazione con quella θ dell'angolo BAP. Allora, P, se si considera come la punta di una matita, disegnerà sul piano del foglio una certa curva. Le curve così descritte

Fig. 65.

ricevono il nome generico di *curve polari*, o di *spirali*, a cagione della forma a spira, come di serpe, che presentano alcune di esse.

Una delle spirali più notevoli è quella che si suol nominare da Archimede, che ne espose le proprietà principali: sebbene sia stata inventata da Conone di Samo, che fiorì due secoli e mezzo circa prima dell'era cristiana. La definizione di questa linea è semplicissima. La spirale di Archimede è la curva tracciata da un punto P, che scorre uniformemente lungo il raggio AP, mentre questo gira uniformemente intorno al polo A. Sia C la posizione occupata dal punto mobile, quando il raggio coincide colla retta iniziale: e AC contenga a unità di lunghezza. Allora, se P

è la posizione occupata dal punto, quando il raggio ha descritto l'angolo BAP, contenente θ unità angolari, e il segmento AC′ di AP ha la stessa misura di AC, C′P sarà il segmento descritto dal punto mobile, mentre il raggio ha girato dell'angolo CAP (fig. 65). Ora, poichè il raggio e il punto, per supposto, si muovono uniformemente, il segmento C′P dev'essere proporzionale all'angolo CAP; cioè il rapporto di C′P a CAP dev'essere una quantità, che rimane sempre la stessa, qualunque sia il segmento descritto dal punto mobile, e l'angolo corrispondente. Sia b il tratto percorso dal punto lungo il raggio, mentre descrive l'angolo che si prende per unità; allora C′P deve essere eguale a questo numero, moltiplicato pel numero di unità angolari contenuto da CAP. Adoperando la lettera r per rappresentare la grandezza di AP, abbiamo quindi

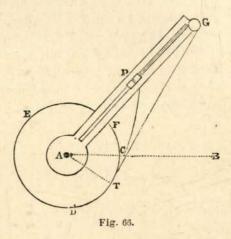
$$C'P = b \times \theta; \text{ ma } C'P = AP - AC' = r - a;$$

quindi $$r = a + b\,\theta.$$

Questa relazione fra r e θ si chiama l'*equazione* polare della spirale.

La spirale d'Archimede si può descrivere per mezzo del seguente apparecchio, di facile costruzione. DEF (fig. 66) è un disco circolare di raggio opportuno, scanalato lungo l'orlo. Un regolo, AG, impernato nel mezzo di questo disco, può girare intorno al centro A di esso, come il raggio precedentemente considerato intorno al polo. All'altra estremità, questo regolo porta una carrucola G. Finalmente, un filo, fissato per un capo ad un punto D della scanalatura del disco, passa sopra la carrucola G, e, per l'altro

capo è attaccato ad un piccolo corsoio P, che porta una matita, e può scorrere, entro una guida, lungo il regolo. Il filo si mantiene teso da P in G, e da G alla scanalatura del disco, per mezzo di un elastico, attaccato per un capo al corsoio P, e per l'altro al centro A. Ciò posto, se, premendo il disco contro il foglio, si farà girare il regolo AG in senso contrario a quello degl'indici dell'orologio, sul suo perno A, la matita P traccierà la spirale richiesta.

Fig. 66.

Difatti, poichè il filo si mantiene sempre tangente al disco nel punto T, la figura GAT, mentre il regolo gira, conserva sempre la stessa grandezza e la stessa figura, per modo che la lunghezza del tratto TG di filo resta sempre la stessa. Segue da ciò che se, facendo girare il regolo dalla posizione AB alla posizione AP, si avvolge al disco un tratto di filo rappresentato dall' arco DT, il tratto PG, mentre il corsoio passa da C in P, si deve accorciare di un tratto di lunghezza DT. Ora, il tratto di

filo DT, che s'avvolge al disco, è proporzionale all'angolo di cui si gira il regolo. Quindi, il punto P si accosta a G di un tratto proporzionale a questo angolo: e perciò descrive una spirale d'Archimede.

Disponendo di una spirale di questa specie accuratamente descritta, si potrà valersene per dividere un angolo in un numero qualunque di parti aventi fra loro determinati rapporti: problema, che spesso si presenta. Facciamo coincidere il vertice dell'angolo dato col polo della spirale, e siano AC ed AP (fig. 67) i raggi vettori che coincidono coi lati; quindi, con centro nel polo, e raggio AC, descriviamo un circolo, il quale incontri il lato AP nel punto C'. Ciò posto, supponiamo risolto il problema, e siano AD, AE e AF i raggi vettori che dividono l'angolo nel modo prescritto. Se questi raggi incontrano l'arco di circolo CC' rispettivamente in D', E' ed F', dalla proprietà fondamentale della spirale, segue immediatamente che le rette D'D, E'E, F'F e C'P saranno fra loro nello stesso rapporto che gli angoli CAD, CAE, CAF e CAP. Perciò, se si prendono sopra AP

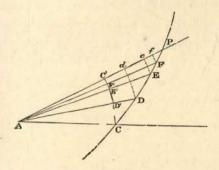
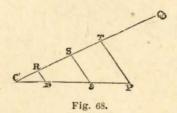



Fig. 67.

tre lunghezze A*d*, A*e* e A*f* eguali ad AD, AE ed AF, C'P riuscirà diviso, nei punti *d*, *e*, *f*, in parti proporzionali agli angoli richiesti. Reciprocamente, diviso C'P in quattro segmenti C'*d*, *de*, *ef* ed *f*P proporzionali alle parti in cui si tratta di dividere l'angolo dato, le lunghezze A*d*, A*e*, A*f* saranno i raggi di altrettanti circoli aventi centro comune in A, tali che, congiungendo con A i punti in cui segano la spirale, l'angolo dato risulterà diviso nel modo prescritto. Così, per mezzo della spirale d'Archimede, la divisione di un angolo in un modo qualsivoglia è ricondotta alla divisione corrispondente di una retta.

Ora, la divisione di una retta in un dato modo, cioè in una serie di segmenti, che stanno fra loro in determinati rapporti, è un problema, che si può immediatamente risolvere, per ciò che si è veduto a suo luogo, mediante riga e compasso. Così, supponiamo che si tratti di dividere il segmento C'P in tre segmenti proporzionali ai numeri 3, 5 e 4. A tal fine, basterà segnare sopra una retta descritta ad arbitrio da C', per esempio, C'Q, tre tratti consecutivi, C'R, RS ed ST, contenenti rispettivamente 3, 5 e 4

Fig. 68.

unità di lunghezza qualunque. Congiungendo il termine T dell'ultimo tratto con P, e descrivendo da R e da S le parallele R*r* ed S*s* a questa retta, C'P riuscirà diviso in *r* ed *s*

proporzionalmente a 3, 5 e 4, nel modo voluto. Ciò segue immediatamente dalla teoria dei triangoli simili, che abbiamo a suo luogo esposta (pag. 128). Difatti, i triangoli R C′*r*, S C′*s* e T C′P sono simili: quindi hanno i lati proporzionali: e da ciò apparisce immediatamente la verità di ciò che abbiamo asserito.

Una spirale d'Archimede incisa sopra una lastra di metallo, o d'avorio, è uno strumento che torna utilissimo di aggiungere a quelli che ordinariamente compongono le così dette scatole di strumenti di matematica.

§ 9. *La spirale equiangola.*

Un'altra spirale importante fu inventata da Cartesio, e, per due insigni proprietà, si chiama *spirale equiangola*, o *spirale logaritmica.*

Abbiasi un triangolo BOA; e supponiamo che l'angolo in O sia abbastanza piccolo, e i lati OA ed OB differiscano poco, l'uno dall'altro. Sul lato OB costruiamo (fig. 69) un triangolo BOC, simile ad AOB, in modo che l'angolo in B sia eguale all'angolo in A. Quindi costruiamo sul lato OC un triangolo COD simile a BOC, e, per conseguenza, ad AOB; e, in modo analogo, costruiamo, sopra OD, un quarto triangolo, simile ai precedenti: sopra OE, un quinto: e via discorrendo. Formeremo così una figura composta di tanti triangoli, AOB, BOC, COD, DOE, ecc., simili fra loro, e tali che gli angoli in O sono tutti eguali, e due consecutivi hanno un lato comune che rappresenta due lati non corrispondenti (cioè non opposti ad angoli eguali). I punti A, B, C, D, E, ecc. costituiranno i vertici di una certa linea poligonale; e basterà prendere gli angoli in O abbastanza piccoli, perchè,

accorciandosi in proporzione i lati, essa presenti sensibilmente l'apparenza di una curva continua. Questa curva, alla quale, prendendo gli angoli in O sempre più piccoli,

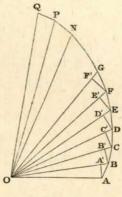



Fig. 69.

si può approssimarsi finchè si vuole, riceve il nome di *spirale equiangola.* Ecco per qual ragione: AB, BC, CD, ecc., essendo lati corrispondenti di altrettanti triangoli simili, formano coi lati egualmente corrispondenti OB, OC, OD, ecc. angoli eguali. Ora, quando gli angoli in O sono estremamente piccoli, AB, BC, CD ecc. si confondono con altrettanti elementi consecutivi della curva: e, per conseguenza, la spirale in discorso incontra tutti i raggi, che escono dal polo O, sotto un medesimo angolo.

Ora, procuriamo di trovare la relazione che collega un raggio vettore qualunque OP $(= r)$ coll'angolo vettoriale corrispondente AOP $(= \theta)$.

Poichè i triangoli AOB, BOC, COD ecc. sono tutti simili, i

loro lati corrispondenti sono proporzionali (pag. 128), vale a dire,

$$\frac{OB}{OA} = \frac{OC}{OB} = \frac{OD}{OC} = \frac{OE}{OD} = \frac{OF}{OE} = \text{ecc.}$$

Rappresentiamo col simbolo μ il valore comune di tutti questi rapporti, che sarà una certa quantità scalare.

Avremo

$$OB = \mu.OA;\ OC = \mu.OB;\ OD = \mu.OC;\ \text{ecc.}$$

Quindi, $OB = \mu.OA$: $OC = \mu^2.OA$: $OD = \mu^3.OA$, e così via; per modo che, se ON è il raggio vettore a cui si arriva formando successivamente in O n angoli eguali,

$$ON = \mu^n.OA.$$

Ciò premesso, supponiamo che gli angoli in O siano eguali ad una certa frazione piccolissima dell'angolo unitario, come sarebbe, per esempio $\frac{1}{100}$, o $\frac{1}{1000}$. Rappresenteremo questa frazione con $1/b$: e, per maggior semplicità, supporremo che b sia un numero intero. Rappresentiamo inoltre col simbolo λ la potenza b^{sima} di μ, per modo che $\lambda = \mu^b$. Allora, μ sarà una radice b^{ma} di λ, e, colla notazione spiegata a pag. 171, scriveremo $\mu = \lambda^{1/b}$.

Da ciò concludiamo $ON = OA.\lambda^{n \times 1/b}$, ossia, per disteso: La base dell'n^{mo} dei triangoli simili, costruiti, nel modo precedentemente esposto, intorno al punto O, è eguale al prodotto della base del primo, per una certa quantità λ, elevata alla potenza n volte la quantità $1/b$, che esprime, in unità angolari, la grandezza comune degli angoli in O.

Ora, supponiamo che il raggio OP cada nell'angolo formato dalla base ON dell'n^{mo} triangolo del sistema considerato con quella, OQ, del $(n+1)^{mo}$ (fig. 69). Poichè ON e OP formano con OA angoli rispettivamente eguali ad n volte, e ad $n+1$ volta, $1/b$, la grandezza dell'angolo AOP, che rappresenteremo con θ, dev'essere compresa fra n/b ed $(n+1)(1/b)$, per modo che differirà di meno di $1/b$ dall'una e dall'altra quantità. Similmente, la grandezza di OP deve cadere fra quelle di ON e di OQ. Ciò sta, per quanto s'impiccoliscano gli angoli in O, in modo da ridurre la spezzata a confondersi colla spirale: e cioè, per quanto piccola si prenda la frazione $1/b$, che rappresenta la grandezza degli angoli in discorso, in parti dell'angolo unitario. Ora, questa quantità si può concepire tanto piccola da potersi considerare come trascurabile; e da ciò concludiamo che, *al limite*, l'angolo θ diventa eguale a n/b, mentre il raggio OP si riduce ad ON, o ad OQ, che finiscono per diventare eguali fra loro. Quindi $OP = OA.\lambda^{n/b} = OA.\lambda^{\theta}$, e, per disteso: Se un raggio OP della spirale equiangola forma con un altro, OA, un angolo, AOP, rappresentato, in parti dell'unità angolare, dalla quantità θ, il rapporto di OP ad OA è eguale ad una certa quantità λ, elevata alla potenza θ.

La precedente relazione, rappresentando con a ed r la lunghezza di OA e di OP, si scriverà così: $r = a\lambda^{\theta}$; e questa è la così detta *equazione polare* della spirale considerata.

Ora, dallo studio di questa linea, ricaveremo alcuni risultati importanti. Il lettore riconoscerà immediatamente che il rapporto di due raggi, siccome non dipende che dall'angolo compreso, è lo stesso per ogni coppia di raggi

che formano uno stesso angolo. Ciò premesso, supposto che si voglia moltiplicare il rapporto di due quantità qualunque p e q, per quello di due altre, r ed s, possiamo procedere nel seguente modo: Troviamo quattro raggi

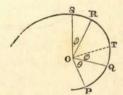



Fig. 70.

della spirale, OP, OQ, OR, OS, i quali contengano tante unità lineari, quante sono le unità di quantità rispettivamente contenute in p, q, r, s; e sia θ l'angolo compreso dalla prima coppia, φ quello compreso dalla seconda. Per la proprietà fondamentale della spirale,

$$\frac{OQ}{OP} = \lambda^{\theta} \text{ e } \frac{OS}{OR} = \lambda^{\varphi};$$

quindi

$$\frac{OQ}{OP} \times \frac{OS}{OR} = \lambda^{\theta} \times \lambda^{\varphi} = \lambda^{\theta + \varphi};$$

donde apparisce che il prodotto in discorso è eguale al rapporto di due raggi qualunque, che comprendano l'angolo $\theta + \varphi$. Per trovare una coppia si fatta, basterà che costruiamo l'angolo QOT (fig. 70) eguale a φ; se OT è il raggio corrispondente della spirale, $\frac{OT}{OP} = \lambda^{\theta + \varphi}$; e questo rapporto, per quanto abbiamo precedentemente veduto, è

eguale al prodotto dei rapporti dati, che si trattava di eseguire.

Da ciò segue che, per moltiplicare fra loro dei rapporti, basterà sommare gli angoli compresi da altrettante coppie di raggi, che stanno nei rapporti dati; il rapporto di due raggi qualunque, che comprendono un angolo eguale alla somma così trovata, sarà eguale al prodotto richiesto. Quindi, la spirale equiangola permette di sostituire l'*addizione alla moltiplicazione;* sostituzione, che è della più grande utilità, perchè la prima operazione è assai più facile della seconda.

Similmente, poichè

$$« \frac{OQ}{OP} \text{ diviso per } \frac{OS}{OR} » = « \lambda^{\theta} \text{ diviso per } \lambda^{\varphi} » = \lambda^{\theta - \varphi},$$

la divisione di due rapporti si potrà ridurre alla sottrazione di due angoli.

Una serie di quantità, per mezzo della quale, come per mezzo degli angoli al polo di una spirale equiangola, si può sostituire l'addizione e la sottrazione alla moltiplicazione e alla divisione, costituisce ciò che si chiama una *tavola di logaritmi.* La spirale equiangola rappresenta una tavola grafica di logaritmi: e perciò si chiama anche *spirale logaritmica.*

§ 10. *Proprietà dei logaritmi.*

Poichè, nella spirale logaritmica, $OP = OA \times \lambda^{\theta}$, dove θ rappresenta l'angolo AOP, si vede che, se s'immagina che θ vada crescendo, ossia che OP vada rotando intorno

ad O, ogniqualvolta l'angolo vettoriale AOP riceverà un determinato aumento, OP riuscirà moltiplicato per una stessa quantità. Quando una quantità varia al variare di un'altra, in modo che riesce moltiplicata per una stessa quantità, ogniqualvolta la seconda riceve un determinato aumento, si dice che *cresce in ragione logaritmica:* chiamando *ragione logaritmica* il rapporto dell'aumento che riceve la quantità stessa, quando la seconda riceve l'aumento unitario, al valore iniziale.

Vediamo d'applicare questi concetti alla nostra spirale. Siano AOB, BOC, COD, ecc., i triangoli per mezzo dei quali si costruisce la linea, nel modo indicato (fig. 69): e supponiamo che gli angoli in O siano tutti eguali e piccolissimi. Prendiamo sopra OB una lunghezza OA′ eguale ad OA: sopra OC una lunghezza OB′ eguale ad OB: sopra OD una lunghezza OC′ eguale ad OC: e via discorrendo. A′B, B′C, C′D, ecc., sono gli aumenti che il raggio successivamente riceve, mentre ruota da OA in OB, da OB in OC, e così via. Ora i triangoli AOB, BOC, COD, ecc., sono tutti simili: ed egualmente simili sono i triangoli isosceli AOA′, BOB′, COC′, ecc. Quindi, saranno simili anche i triangoletti AA′B, BB′C, CC′D, ecc., che rappresentano la differenza dei termini corrispondenti delle due serie: e, perciò, i loro lati corrispondenti saranno proporzionali. Da ciò segue che le lunghezze

A′B, B′C, C′D, ecc., stanno fra loro come
A′A, B′B, C′C, ecc., ossia come
OA, OB, OC, ecc.,

vale a dire che

$$\frac{A'B}{OA} = \frac{B'C}{OB} = \frac{C'D}{OC} = \text{ecc.},$$

per modo che il rapporto dell'incremento al valore iniziale della variabile è costante.

Se gli angoli in O sono estremamente piccoli, la retta AA′ coinciderà sensibilmente coll'arco di un circolo avente centro in O e raggio OA. Quindi, in tal caso, AA′ si potrà misurare col prodotto di OA per l'angolo AOA′ (v. pag. 168), e l'angolo in A′ si confonderà con un retto.

D'altra parte, il rapporto di A′B ad AA′ è lo stesso per tutti i triangoletti AA′B, BB′C, CC′D, ecc. Per determinarne il valore, osserviamo che, se si considerano come vertici di questi triangoli gli angoli eguali ABA′, BCB′, CDC′, ecc., quello è, in ciascun triangolo, il rapporto della *base* alla *perpendicolare* abbassata dal vertice sopra di essa, che, a suo luogo, (pag. 194), fu definito come cotangente dell'angolo al vertice. Ora, questi angoli sono quelli che la spirale, nei diversi punti, forma col raggio descritto dal polo. Rappresentiamo la loro comune grandezza con α. Per quanto precede,

$$\cot\alpha = \frac{A'B}{AA'} = \frac{A'B}{OA \times \text{angolo } AOA'};$$

e di qui si ricava

$$\frac{A'B}{OA} = \text{angolo } AOA' \times \cot\alpha.$$

A′B è l'incremento corrispondente all'angolo AOA′, supposto estremamente piccolo; quindi, il rapporto dell'incremento corrispondente all'angolo *uno* al valore iniziale, al quale abbiamo dato il nome di ragione logaritmica, sarà $\cot\alpha$: e concludiamo che la ragione logaritmica, se-

condo la quale cresce il raggio di una spirale equiangola, mentre, girando intorno al polo, descrive angoli eguali, è rappresentata dalla cotangente dell'angolo di grandezza costante, che il raggio forma in ogni punto colla curva.

Supponiamo che la lunghezza iniziale OA sia l'unità lineare; poichè $OP = OA \times \lambda^{\theta}$, in questo caso, il raggio, descrivendo l'angolo uno, acquisterà la lunghezza λ. Quindi λ rappresenta la lunghezza, che acquista un raggio, inizialmente eguale all'unità, quando descrive l'angolo uno, e, mentre gira, cresce secondo la ragione logaritmica $\cot\alpha$.

Ora conveniamo di rappresentare col simbolo *e*, ciò che diventa questa lunghezza, quando si suppone che la ragione logaritmica riceva il valor particolar uno; *e* avrà un certo valor numerico determinato. Per mezzo di calcoli, nei quali qui non possiamo entrare, si trova che un valore approssimato di essa è 2,718. Ciò significa che, se un raggio inizialmente eguale all'unità, descrive l'angolo uno, e, mentre gira, cresce secondo la ragione logaritmica uno, l'aumento totale (1,718), che riceve la sua lunghezza, è compreso fra otto e nove quinti della sua grandezza iniziale.

Poichè *e* è la lunghezza che acquista il raggio unitario, descrivendo l'angolo uno, e, ogniqualvolta l'angolo cresce di una determinata quantità, il raggio riesce moltiplicato per una stessa quantità, è chiaro che la lunghezza, che acquista il raggio unitario, descrivendo, colle precedenti ipotesi, un angolo eguale a γ unità, sarà rappresentata da e^{γ}.

Ora supponiamo che il raggio unitario, mentre gira, cresca secondo la ragione logaritmica rappresentata dal

numero γ. In questo caso, la lunghezza che esso acquisterà, descrivendo l'angolo uno, sarà quella stessa che acquisterebbe, se una ragione eguale ad $1/\gamma$ si distribuisse sopra γ angoli eguali ad uno, e cioè, se descrivesse un angolo di γ unità, crescendo colla ragione uno; donde concludiamo, per quanto precede, che la lunghezza in discorso, sarà e^{γ} (*). Quindi e^{γ} rappresenta, ad un tempo, il risultato, che si ottiene, facendo girare il raggio unitario dell'angolo γ, quando cresce colla ragione logaritmica uno, e quello che si ottiene, facendolo girare dell'angolo uno, quando cresce colla ragione logaritmica γ.

Ciò posto, cerchiamo qual sarà, in generale, il significato di e^{γ}, quando γ rappresenta una frazione eguale ad s/t, dove s e t sono numeri interi. Sia x il risultato, per ora incognito, che si ottiene, facendo girare il raggio unitario di un angolo eguale a γ, mentre cresce colla ragione logaritmica

(*) Per la relazione dimostrata a pag. 208, l'aumento AA' che riceve il raggio OA, descrivendo l'angolo estremamente piccolo AOA', nel caso che la ragione logaritmica sia uno, è dato da

$$\text{AA}' = \text{OA} \times \text{angolo AOA}',$$

e, nel caso che la ragione stessa sia γ, da

$$\text{AA}' = \text{OA} \times \text{angolo AOA}' \times \gamma = \text{OA} \times (\text{angolo AOA}' \times \gamma).$$

Perciò, se, nel secondo caso, il raggio unitario descrive l'angolo uno, diviso questo angolo in tanti angoli elementari estremamente piccoli, in modo che a ciascuno di essi siano applicabili le relazioni precedenti, esso acquisterà la stessa lunghezza, che acquisterebbe, crescendo colla ragione logaritmica uno, e descrivendo ogni angolo elementare γ volte di seguito, invece di una sola, ossia descrivendo un angolo di γ unità, invece dell'angolo uno.

Nota del Traduttore.

uno. Allora, x^t sarà il risultato, che si ottiene, facendolo girare, a parità di condizioni, di un angolo eguale a t volte γ, e, per conseguenza, a s volte l'angolo unitario. Quindi $x^t = e^s$; donde apparisce che x sarà una t^{ma} radice di e^s, per modo che $x = e^{\frac{s}{t}} = e^{\gamma}$. Segue da ciò che, se γ è una frazione commensurabile, e^{γ} rappresenterà la lunghezza che acquista il raggio unitario, descrivendo l'angolo γ, mentre cresce colla ragione logaritmica uno: o, per ciò che abbiamo precedentemente veduto, descrivendo l'angolo unitario, mentre cresce colla ragione γ.

Ora, supponiamo che si possa trovare una frazione commensurabile γ eguale a $\cot\alpha$. In tal caso e^{γ} sarà la lunghezza, che acquista il raggio unitario, descrivendo l'angolo unitario, mentre cresce colla ragione logaritmica $\cot\alpha$. Ma si è precedentemente trovato (pag. 209) che questa lunghezza è rappresentata da λ. Quindi,

$$\lambda = e^{\gamma}.$$

Se il raggio unitario, mentre cresce colla ragione $\cot\alpha$, descriverà l'angolo θ, invece dell'angolo uno, acquisterà la lunghezza λ^{θ}; e da ciò segue

$$\lambda^{\theta} = e^{\gamma\theta}.$$

Quindi, abbiamo $\mathrm{OP} = \mathrm{OA}.\lambda^{\theta} = \mathrm{OA}.e^{\gamma\theta}$; e, coi simboli precedentemente adoperati,

$$r = ae^{\gamma\theta};$$

equazione della spirale equiangola, espressa per mezzo della quantità e.

Supposto a eguale all'unità di lunghezza, e $\cot\alpha$ o γ parimente eguale ad uno, l'equazione della spirale si ridurrà a

$$r = e^{\theta}.$$

Il simbolo e^{θ} si chiama l'*esponenziale* di θ; reciprocamente, θ si chiama il *logaritmo naturale* di r, e simbolicamente si scrive

$$\theta = \log_e r.$$

La quantità e si dice la *base* del sistema dei logaritmi naturali. Quindi, nel caso supposto, la spirale costituisce una tavola grafica di *logaritmi naturali*.

Riprendiamo l'equazione generale

$$r = a.e^{\gamma\theta},$$

e supponiamo γ scelto in modo che sia $e^{\gamma} = 10$: per modo che γ rappresenti l'angolo di cui deve girare il raggio unitario, per acquistare la lunghezza di dieci unità, nell'ipotesi che, mentre gira, cresca colla ragione logaritmica unitaria. Supposto inoltre a eguale alla lunghezza unitaria, l'equazione diventerà $r = e^{\gamma\theta} = 10^{\theta}$. In questo caso, θ si chiama il logaritmo di r a base 10, e simbolicamente si scrive

$$\theta = \log_{10} r.$$

La spirale, che si ottiene, in questo caso, costituisce una tavola grafica dei logaritmi a base 10: che sono quelli che comunemente si adoperano nei calcoli numerici.

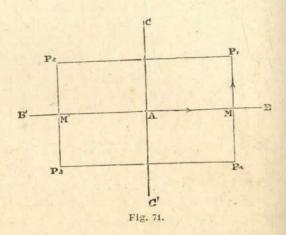
I logaritmi naturali furono scoperti da Giovanni Napier, che pubblicò la sua invenzione nell'anno 1614 (*). I logaritmi a base 10 si adoperano oramai in ogni specie di calcoli numerici, fatta eccezione soltanto dei più semplici: e il loro pregio consiste tutto nella circostanza che la somma e la sottrazione, ch' essi permettono di sostituire alla moltiplicazione e alla divisione, sono operazioni più semplici di queste.

§ 11. *Metodo cartesiano di determinare la posizione.*

(γ) La posizione di un punto P_1 di un piano si potrà determinare anche nel seguente modo. Descriviamo pei due punti dati, A e B, la retta BAB′, e per A, la perpendicolare CAC′ a questa retta. Le due rette divideranno il piano in quattro parti eguali, che si chiamano *quadranti*. Sia P_1M una retta, parallela a CA, condotta dal punto P_1 (di cui si vuol determinare la posizione per rispetto ad A), ed M sia il punto in cui incontra B′A B. Ciò posto, la via, per passare da A a P_1, si potrà indicare nel seguente modo: Facciasi il passo AM, partendo da A, lungo la retta B′AB, quindi, voltando a sinistra, il passo MP_1, ad angolo retto col precedente. Ora, un passo eguale ad AM, partendo da A, si potrà fare, così avanti, lungo AB, come indietro, lungo AB′. Per distinguere i due casi, nel modo stesso che in una precedente occasione (v. pag. 120), rap-

(*) *Logarithmorum Canonis Descriptio.* Edinburgo. 1614.

presenteremo con $+$ AM il passo *avanti*, lungo AB, e con $-$ AM il passo *indietro*, di egual lunghezza, lungo AB'. Vagliamoci della lettera i, per indicare l'operazione, che altrove (pag. 177) abbiamo rappresentato col simbolo $(\pi/2)$.

Fig. 71.

Richiamandone la definizione, i, applicato al passo unitario, significherá che si deve descrivere dal termine del passo precedente, andando *avanti*, nella stessa direzione, un secondo passo di lunghezza eguale all'unità, e farlo poi girare di un angolo retto, in senso contrario a quello degl'indici dell'orologio, intorno al punto medesimo; e i.MP rappresenterá l'operazione consistente nel descrivere dal punto M, nella direzione AB, un passo di lunghezza MP_1, e farlo quindi girare di un angolo retto, in senso contrario a quello degl'indici dell'orologio, intorno al punto M. Ciò posto, la posizione di P_1 relativa ad A, o, in altre parole, il passo AP_1, si potrá esprimere simbolicamente, per mezzo della relazione

$$AP_1 = AM + i\,MP_1.$$

Se, invece che a P_1, si trattasse di arrivare al punto P_4, posto nel quadrante BAC', si dovrebbe descrivere da M un passo di lunghezza MP_4, andando *indietro*, invece che avanti, e farlo poi girare di un angolo retto, in senso contrario a quello degl' indici dell' orologio. Distinguendo il passo indietro col segno —, si trova così

$$AP_4 = AM - i.MP_4.$$

Ora vediamo in qual modo si arriverà al punto P_2, posto nel quadrante CAB', la cui distanza perpendicolare da AB' è P_2M'. A questo scopo, in primo luogo, descriveremo il passo indietro AM', poi, da M', il passo *avanti* di lunghezza $M'P_2$, che, per conseguenza, sarà volto verso A; finalmente, applicheremo a questo passo l' operazione *i*, per mezzo della quale roterà di un angolo retto, in senso contrario a quello degl'indici dell'orologio, intorno al punto M'; e, in tal modo, arriveremo al punto P_2. Quindi

$$AP_2 = - AM' + i.M'P_2,$$

Finalmente, per arrivare al punto P_3, posto nel quadrante B'AC', si descriverà il passo indietro AM'; poi da M', il passo indietro $M'P_3$: e finalmente si ruoterà questo passo di un angolo retto, in senso contrario a quello degl'indici dell'orologio; donde si conclude

$$AP_3 = - AM' - i. M'P_3.$$

Ora supponiamo che P_1, P_2, P_3 e P_4 siano i quattro ver-

tici di un rettangolo, avente il centro in A, e i lati paralleli a BAB′ e a CAC′, per modo che MP_1 sia eguale a $M'P_2$, e $M'P_3$ a MP_4; e rappresentiamo con x e y il numero delle unità lineari rispettivamente contenuto nella prima e nella seconda coppia di passi. Allora, i quattro passi, che definiscono, nei diversi casi, la posizione di P relativa ad A, si potranno rappresentare nel modo espresso dalle relazioni seguenti:

$$AP_1 = x + iy \qquad AP_2 = -x + iy$$
$$AP_3 = -x - iy \qquad AP_4 = x - iy.$$

Ivi x e y hanno puramente il significato di numeri; ma i passi, che rappresentano i numeri y si devono immaginare segnati sopra una retta perpendicolare a quella su cui s'immaginano segnati i passi che rappresentano i numeri x. A questo modo, una coppia di numeri x, y, mediante i passi che li rappresentano, servirà a determinare la posizione di un punto.

A tal fine, gioverà supporre che i numeri in discorso portino con sè il segno del passo corrispondente. Allora, per trovare il punto rappresentato da una coppia di valori positivi di x e y, secondo la regola generale precedentemente esposta, si descriverà da A, andando avanti lungo AB, un passo eguale ad x, poi, da B, andando avanti nella stessa direzione, un passo eguale ad y, e si ruoterà quest'ultimo passo di un angolo retto, in senso contrario a quello degl'indici dell'orologio, intorno a B. Ciò fatto, il termine del secondo passo sarà il punto richiesto. Nel caso che una delle due quantità x e y, o entrambe, siano negative,

il passo corrispondente si farà andando indietro. Perciò:

P_1,	posizione	nel quadrante	BAC,	è determinata	da	x, y.
P_2,	»	»	»	CAB′,	»	»	$-x, y$.
P_3,	»	»	»	B′AC′,	»	»	$-x-y$.
P_4,	»	»	»	C′AB,	»	»	$x, -y$.

Le quantità x e y si chiamano le *coordinate cartesiane* del punto P, essendo stato Cartesio il primo, che si valse di questo metodo, per determinare la posizione di un punto.

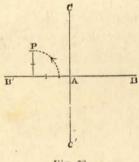



Fig. 72.

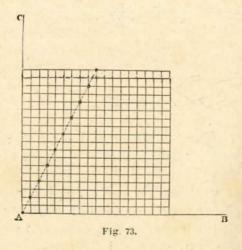
BAB′ e CAC′ ricevono il nome di *assi* coordinati, rispettivamente, delle x e delle y, e A quello di *origine* delle coordinate.

Per dare un esempio numerico, si domandi in qual modo si passerà dall'origine A ad un punto P, le cui coordinate cartesiane siano (—3, 2). Essendo $AP = -3 + i.2$, si descriverà da A, un passo indietro di 3 unità, poi, dal termine di esso, un passo avanti di 2, e finalmente si girerà questo secondo passo intorno al punto medesimo

di un angolo retto, in senso contrario a quello degl'indici dell'orologio; in tal modo si arriverà al punto in discorso.

Supposto il punto P determinato dalle coordinate cartesiane x ed y, prendendo tanti passi x, e accoppiando con ciascuno di essi un passo y, collegato da una relazione invariabile, si otterrà una successione di punti P, la quale, nell'ipotesi che si attribuiscano ad x tutti i valori possibili, formerà una linea. La relazione esistente fra x e y si chiama l'*equazione cartesiana* di questa linea.

Per esempio, supponiamo che ogni passo x si accoppii col passo y doppio di esso. La relazione, che collega le due coordinate sarà, in questo caso, $y = 2x$, e le indicazioni per arrivare ad un punto qualunque della serie saranno compendiate dall'espressione $x + i.2x$. Supponiamo che il

Fig. 73.

quadrante BAC sia diviso, da due serie di rette rispettivamente parallele all'uno e all'altro asse, in tanti quadrati

eguali: e i lati di essi siano eguali all'unità di lunghezza. Allora, gioverà prendere successivamente $x = 1, 2, 3$, ecc.; e i passi si segneranno assai facilmente. Così, segneremo 1 lungo AB, e 2 a sinistra; 2 lungo AB, e 4 a sinistra; 3 lungo AB, e 6 a sinistra; 4 lungo AB, e 8 a sinistra; 5 lungo AB, e 10 a sinistra; e via discorrendo. Si riconoscerà facilmente (per quanto si è veduto a pag. 128) che tutti i punti così costruiti giaceranno sopra una retta passante per A, e che alla stessa retta apparterrà ogni punto ottenuto, colla stessa costruzione, segnando un passo qualunque lungo AB, e poi un passo perpendicolare, di lunghezza doppia. Attribuendo a x la serie dei valori negativi, si otterrà la parte della retta, che giace nel terzo quadrante B'A C'. Concludiamo quindi che $y = 2x$ è l'equazione di una retta che passa per A.

Diamo anche un altro esempio. Supponiamo che il rettangolo contenuto da y e da una lunghezza di 2 unità contenga sempre tante unità di area quante sono le unità quadrate rappresentate da x^2. In questo caso, x e y saranno collegate dalla relazione $2y = x^2$, e attribuendo a x i valori 1, 2, 3, 4, 5, 6, ecc., otterremo la serie seguente di passi, che conducono dal punto A ad altrettanti punti della successione considerata:

$$1 + i.\frac{1}{2}, \qquad 2 + i.2, \qquad 3 + i.\frac{9}{2},$$
$$4 + i.8, \qquad 5 + i.\frac{25}{2}, \qquad 6 + i.18, \text{ ecc.}$$

Valendosi dei quadretti, le operazioni indicate da queste relazioni si potranno facilmente eseguire; e si troverà così la successione di punti rappresentata dall'annessa figura, nel quadrante BAC.

Attribuendo a x i valori $-1, -2, -3, -4, -5, -6$, ecc., poichè si è veduto che $(-a) \times (-a) = a^2 = (+a) \times (+a)$, si otterranno gli stessi valori di y; e perciò i valori medesimi forniscono la successione di punti, rappresentata dalla figura, nel quadrante B'AC.

Al di sotto della retta BAB' non può cadere alcun punto della successione considerata; poichè, in tal caso, il passo y corrispondente dovrebbe essere negativo: e ciò non può darsi, perchè ogni passo x, positivo o negativo, elevato al quadrato, fornisce un passo y positivo.

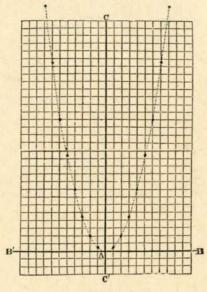



Fig. 74.

I punti così ottenuti risultano distribuiti sopra una curva, che appartiene a quelle ombre del circolo che abbiamo

chiamato parabole. Quindi $2y = x^2$ è l'equazione di una parabola.

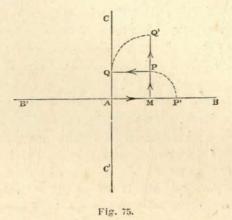
Questo metodo di generare le curve è di grande importanza, ed è largamente applicato in molti rami della fisica. Per dare un esempio, supponiamo che le differenze dei successivi passi x rappresentino successivi intervalli di tempo, e i passi y, le corrispondenti altezze della colonna di un barometro, al di sopra di un certo livello medio. La serie dei punti, se gl'intervalli di tempo saranno abbastanza brevi, presenterà l'apparenza di una curva, la quale avrà la proprietà di fornire una rappresentazione grafica delle variazioni presentate dal barometro, nel periodo durante il quale se ne sono registrate le altezze. Ora parecchi giornali del mattino sogliono dare le curve barometriche del giorno precedente. Quelle curve sono generalmente ottenute con un semplice apparecchio fotografico, per mezzo del quale l'altezza corrispondente ad ogni istante riesce automaticamente registrata.

La deduzione delle curve dalla loro equazione cartesiana, o, come si suol dire, la *descrizione delle curve*, è un argomento di matematica pura, che presenta il più grande interesse. Ci basti rammentare il risultato importante, che ogni relazione, che non involge potenze di x e di y superiori alla seconda, è l'equazione di una delle curve, che abbiamo definito come ombre del circolo.

§ 12. *Sui numeri complessi.*

Riprendiamo il simbolo d'operazione i precedentemente definito, e consideriamolo alquanto più attentamente, allo scopo di riconoscerne meglio il significato. Il punto P sia

rappresentato, come prima, da AM + i.MP, espressione, che, sviluppata, significa: Si passi da A ad M, lungo AB;

Fig. 75.

quindi, percorrendo la stessa retta, da M a P′ (essendo MP′ = MP); e finalmente si faccia rotare MP′ intorno ad M, di un angolo retto, in senso contrario a quello degl'indici dell'orologio. Ora, sia MQ′ un passo di lunghezza eguale ad AP′; AM + i.MQ′ significherà: si passi da A ad M, e poi da M a Q′ in direzione perpendicolare ad AM, e a sinistra del passo medesimo, percorrendo una distanza, MQ′, eguale ad AP′. Poichè MQ′ = AP′ = AM + MP = MP + PQ′, l'operazione in discorso si potrà rappresentare con

AM + i. (MP + PQ′),

donde apparisce che si devono descrivere successivamente due passi in direzione perpendicolare ad AM, e cioè il passo MP susseguito da PQ′. Supposto che quest'ultimo si voglia

far girare di un angolo retto nel solito senso contrario a quello degl'indici dell'orologio, per indicarlo, basterà premettervi il simbolo i, e l'espressione ottenuta in tal modo, $\text{MP} + i.\text{PQ}'$, rappresenterà il passo MP susseguito da PQ', in direzione perpendicolare, e a sinistra. Ora, per le relazioni precedenti, PQ' è eguale ad AM; e perciò questa ultima operazione ci condurrà al punto Q della retta AC, al quale si può arrivare, partendo da A, mediante la semplice operazione $0 + i.\text{AQ}$. Da ciò si ricava

$$\begin{aligned} 0 + i.\text{AQ} &= \text{AM} + i.\,(\text{MP} + i.\text{PQ}) \\ &= \text{AM} + i.\text{MP} + i.i.\text{PQ}\ (*); \end{aligned}$$

e poichè le quantità AQ, AM, MP e PQ, qui non rappresentano che le grandezze numeriche dei passi corrispondenti, e, da questo punto di vista, $\text{AQ} = \text{MP}$, ed $\text{AM} = \text{PQ}$, in virtù di queste relazioni, dev'essere

$$0 = \text{AM} + i.i.\text{AM},$$

ossia

$$- \text{AM} = i.i.\text{AM}.$$

Apparisce da ciò che l'operazione i, applicata due volte di seguito, produce l'effetto di un semplice rivolgimento (pag. 42). Simbolicamente, questa proprietà è espressa dalla relazione

$$i^2 = -1;$$

(*) Avverta il lettore che l'eguaglianza del secondo e del terzo membro si riconosce dalla figura.

Nota del Traduttore.

e, spiegata in linguaggio ordinario, significa che, facendo girare un passo di un angolo retto, in senso contrario a quello degl' indici dell' orologio, e poi di un altro angolo retto, nel medesimo senso, si ottiene lo stesso risultato come rivoltandolo.

Ora, a pag. 170, si è veduto che, se x è tal quantità, che, moltiplicandola per sè stessa, si ottiene per prodotto a, x si chiama la radice quadrata di a, e si rappresenta con $\sqrt{a}$. Conformemente a ciò, essendo $i^2 = -1$, si porrà $i = \sqrt{-1}$.

Questo simbolo, finchè ai segni si attribuisce il significato di *quantità*, riesce inesplicabile; poichè, essendo il quadrato d' ogni specie di quantità una quantità positiva, non si potrà concepirne alcuna, che possa essere rappresentata da esso. Per questa ragione, $\sqrt{-1}$ si chiama anche una *quantità immaginaria*. Considerato invece come *simbolo d' operazione*, $\sqrt{-1}$ riceve un significato chiaro e reale: indica di fare un passo avanti, eguale all' unità lineare, e poi di girare la lunghezza così segnata, di un angolo retto, in senso contrario a quello degl' indici dell' orologio.

Ogni espressione della forma $x + \sqrt{-1}\, y$ si chiama un *numero complesso*.

Sia P un punto qualunque determinato dal passo AP = AM + $\sqrt{-1}$ MP, e siano r, x, y i valori numerici delle lunghezze AP, AM e MP. Dal triangolo rettangolo PAM segue $r^2 = x^2 + y^2$. La quantita r si chiama il *modulo* del numero complesso $x + yi$.

Sia inoltre θ il numero d' unità angolari contenute nel-

l'angolo MAP; allora,

$$\sin\theta = \frac{PM}{AP} = \frac{y}{r}, \cos\theta = \frac{AM}{AP} = \frac{x}{r},$$

ossia

$$y = r \sin\theta, x = r \cos\theta.$$

L'angolo θ si chiama l'*argomento* del numero complesso. r e θ sono le coordinate polari del punto P; e si vede così come siano collegate colle coordinate cartesiane del punto medesimo; esse rappresentano rispettivamente il modulo e l'argomento del numero complesso, che si può formare per mezzo delle coordinate cartesiane corrispondenti.

Poichè r è puramente una grandezza numerica, il numero complesso $x + yi$ si potrà porre sotto la forma $r.(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)$ (*), riuscendo così rappresentato dal prodotto del modulo per l'operatore

$$\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta,$$

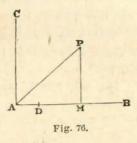
(*) Immaginiamo segnati i punti P e P′ le cui coordinate cartesiane sono rispettivamente $AM = x = r\cos\theta$, $MP = y = r\sin\theta$, e $AM' = \cos\theta$, $M'P' = \sin\theta$ Sarà $AP = x + yi = r\cos\theta + i.r\sin\theta$, $AP' = \cos\theta + i\sin\theta$. Ora essendo i due triangoli AMP e AM′P′ simili fra loro, AP e AP′ giacciono sopra una stessa retta, e le loro lunghezze stanno nel rapporto di r all'unità. Quindi AP si può immaginare dedotta da AP′ per mezzo di una semplice trazione nel rapporto di r a 1. Perciò, mantenendo la scrittura adottata nel caso delle quantità scalari, scriveremo $AP = r.AP'$, ossia $x + yi = r(\cos\theta + i\sin\theta)$.

Nota del Traduttore.

il quale non dipende che dall' argomento θ. La relazione

$$\text{AP} = r.\,(\cos\theta + \sqrt{-1}\,\sin\theta)$$

esprime che il passo AP si potrà ottenere, facendo girare l'unità lineare di un angolo θ, partendo dalla direzione AB, e poi stirandola nel rapporto di $r:1$. La seconda parte

Fig. 76.

di questa operazione è indicata dal modulo r: la prima, dall'operatore $\cos\theta + \sqrt{-1}\,\sin\theta$; e perciò, supposto che AD sia eguale all' unità, e giaccia sulla retta AB, potremo anche porre

$$\text{AP} = r.\,(\cos\theta + \sqrt{-1}\,\sin\theta).\text{AD},$$

considerando il numero complesso $r.\,(\cos\theta + i\,\sin\theta)$ come un simbolo, che rappresenta lo combinazione di due operazioni eseguite sul passo unitario AD.

Così, partendo dal concetto che un numero complesso indica la posizione di un punto, da una serie di considerazioni, fummo tratti a stabilire un'operazione, egualmente rappresentata dal simbolo $\cos\theta + \sqrt{-1}\,\sin\theta$. Questo ope-

ratore, che si può evidentemente considerare come una generalizzazione del simbolo originario $\sqrt{-1}$, applicato ad un passo qualunque, indica che si deve girarlo di un angolo θ. Vedremo che da questo nuovo concetto scaturiscono importanti risultati.

§ 13. *Sull'operazione, che gira un passo di un angolo dato.*

Immaginiamo di applicare l'operatore $\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta$ al passo unitario, per due volte di seguito. L'espressione simbolica di questa operazione sarà

$$(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)\ (\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)$$

ossia

$$(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)^2.$$

Ma, è chiaro che girare un passo successivamente di due angoli eguali a θ equivale a girarlo, in una volta sola, di un angolo 2θ: ciò che torna ad applicarvi l'operatore $\cos 2\theta + \sqrt{-1}\sin 2\theta$. Quindi, quest'ultima operazione è equivalente alla precedente: e ha luogo l'equazione

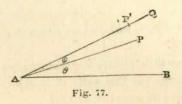
$$(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)^2 = \cos 2\theta + \sqrt{-1}\sin 2\theta.$$

Similmente, n successive rotazioni, ciascuna di un angolo eguale a θ, produrranno lo stesso risultato come una sola rotazione di un angolo eguale a n volte θ; e da ciò si conclude

$$(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)^n = \cos n\theta + \sqrt{-1}\sin n\theta.$$

Questa importante equivalenza di operazioni fu posta nella presente forma simbolica da De Moivre, e, da lui, si suol chiamare Teorema di De Moivre.

Ora, consideriamo l'operazione, per mezzo della quale un passo, AP, si converte in un altro, AQ (fig. 77). È chiaro

Fig. 77.

che si otterrà questo risultato, facendo girare AP, intorno ad A, in senso contrario a quello degl'indici dell'orologio, finchè si dispone lungo AQ: quindi, supposto che P cada in P', per modo che AP' = AP, stirando AP', finchè diventa eguale ad AP; ciò che torna a moltiplicarlo per una quantità ρ, eguale al rapporto di AQ ad AP'.

Rappresentando l'angolo PAQ con φ, ciò è simbolicamente espresso dalle relazioni

$$(\cos\varphi + \sqrt{-1}\,\sin\varphi)\,.\,\mathrm{AP} = \mathrm{AP}'.$$

$$\rho.\,(\cos\varphi + \sqrt{-1}\,\sin\varphi)\,.\,\mathrm{AP} = \rho.\mathrm{AP}' = \mathrm{AQ}.$$

Quest'ultima equazione si può interpretare in diversi modi:

1.° $\rho\,.\,(\cos\varphi + \sqrt{-1}\,\sin\varphi)$ è un numero complesso, del quale ρ è il modulo, e φ l'argomento. Quindi, moltiplicare un passo per un numero complesso significa farlo rotare di un angolo eguale all'argomento, e variarne la lunghezza, mediante una trazione rappresentata dal modulo.

2.° Ma potremo anche porre, come precedentemente, AP $= r(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)$, rappresentando con r la grandezza scalare di AP, e con θ l'angolo BAP, e considerare AP come espressione di un numero complesso $x + \sqrt{-1}\, y$. Dallo stesso punto di vista, anche AQ rappresenterà un numero complesso, che ha per modulo la grandezza scalare del passo risultante ($= \rho$.AP' $= \rho r$), e per argomento l'angolo BAQ $= \theta + \varphi$. Abbiamo quindi la seguente identità:

$$\rho\,(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)\; r\,(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)$$
$$= \rho r.\left(\cos(\theta + \varphi) + \sqrt{-1}\sin(\theta + \varphi)\right).$$

Questa relazione si può tradurre indifferentemente coll'una e coll'altra delle due proposizioni seguenti:

(α) Il prodotto di due numeri complessi è un numero complesso, avente per modulo il prodotto dei moduli dei due numeri, e per argomento la somma dei loro argomenti.

(β) Se il passo unitario si fa rotare di un angolo θ, e si stira nel rapporto di r a 1, quindi il risultato così ottenuto si fa rotare di un angolo φ, e si stira nel rapporto di ρ a 1, si trova lo stesso risultato come facendo girare il passo unitario dell'angolo $\theta + \varphi$, e stirandolo nel rapporto di ρr a 1.

Apparisce da ciò come ogni relazione fra numeri complessi si possa considerare indifferentemente come una proprietà algebrica di quella specie di numeri, o come un teorema intorno alla rotazione, e alla trazione dei passi unitarii.

3.° Finalmente, possiamo riflettere sulla soluzione del

quesito: « Che cos'è il rapporto di due passi *diretti* AQ e AP », ossia, adottando la notazione proposta a pag. 53. « Qual'è il significato del simbolo $\frac{AQ|}{|AP}$? », che scaturisce dalla relazione considerata. Un passo, come AP e AQ, che ha grandezza, direzione e verso si chiama, come abbiamo detto a suo luogo, un vettore. Perciò quel quesito torna a questo: Che cos'è il rapporto di due vettori, ossia quale operazione trasforma un vettore in un altro? La risposta è: Un operazione, che consiste nel prodotto di una rotazione per una trazione.

Ora, la trazione è espressa dal rapporto numerico per mezzo del quale la grandezza scalare di AP è collegata con quella di AQ, quantità parimente scalare; e perciò la chiamiamo un'operazione scalare. La rotazione, alla sua volta, converte la direzione di AP in quella di AQ. È chiaro che ciò si otterrà, facendo girare AP intorno ad un asse perpendicolare al piano del foglio, sul quale sono segnati i due passi; e perciò la seconda parte dell'operazione, per mezzo della quale si converte AP in AQ, non è altro che una rotazione (in senso contrario a quello degl'indici dell'orologio) di un angolo determinato, intorno ad un certo asse. La grandezza di questa rotazione si potrà immaginare rappresentata da un passo segnato sull'asse corrispondente; così se il vettore si dovesse girare di 6 unità angolari, la grandezza di questa rotazione si potrà rappresentare prendendo sull'asse 6 unità di lunghezza. Si potrà fare anche la convenzione di segnare questa lunghezza in una direzione (« davanti al quadrante dell'orologio »), se la rotazione è in senso contrario a quello degl'indici, e nella direzione opposta (« dietro il quadrante »),

se il senso è il medesimo. Apparisce da ciò che la rotazione considerata si potrà esprimere per mezzo di un passo avente grandezza, direzione e verso; e cioè per mezzo di un *vettore*. Così, la natura del rapporto di due vettori riesce perfettamente determinata: questo rapporto è un' operazione, che consiste nel prodotto di uno scalare e d' un vettore. Un prodotto di questa specie si chiama un *quaternione;* termine inventato da Sir Guglielmo Hamilton, il quale fondò sui quaternioni un calcolo di grande efficacia (*).

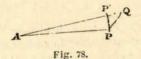
Così, un quaternione è in sostanza l'operazione che, mediante una rotazione, e una trazione, trasforma un vettore in un altro. Dati tre punti in un piano, è chiaro, per quanto precede, che la posizione del terzo per rispetto al primo si potrà ridurre a quella del secondo, mediante una certa rotazione e una certa trazione del passo che congiunge il primo col terzo, e cioè, mediante un quaternione (**).

(*) Il vettore sarà, alla sua volta, il prodotto del vettore unitario avente la medesima direzione, per lo scalare, corrispondente alla trazione, mediante la quale esso se ne deduce: e questa operazione essendo d'altra natura che quella corrispondente al primo scalare, i due scalari, nel prodotto, si devono mantenere distinti. La posizione del vettore unitario si potrà fissare mediante due angoli: cioè mediante l' angolo formato da esso con una retta fissa, e l' angolo formato dal piano di quelle due rette con un piano fisso. Si vede così come quattro elementi occorrano per determinare un quaternione. *Nota del Traduttore.*

(**) Il termine « trazione » si deve intendere che includa ad un tempo il significato di una trazione nel significato comune di questa parola, e quello di una compressione, rappresentata da un valore di ρ minore dell'unità.

§ 14. *Relazione fra la rotazione e l'incremento logaritmico di un passo* (*).

Consideriamo un circolo di raggio eguale all'unità, e procuriamo di determinare come cresce questo raggio, quando, girando intorno al centro, descrive l'unità angolare. Finora non si è trattato che d'incremento nella direzione della lunghezza, e perciò parrebbe che il raggio di un circolo, mentre ruota intorno al centro, non potesse ricevere alcun « incremento. » Ma l'addizione dei vettori suggerisce un'estensione assai naturale del primitivo concetto d'incremento. Supponiamo che un passo AP, descrivendo intorno ad A, l'angolo PAQ, si converta in AQ. Allora, segnando sopra AQ la distanza AP' eguale ad AP (fig. 78), P'Q rappresenterà l'incremento *scalare,* ossia l'incremento, che riceve AP, nella direzione della lunghezza.

Fig. 78.

D'altra parte, se si considera AP come un vettore (vedi pag. 180),

$$AQ = AP + PQ:$$

(*) Per evitare l'uso promiscuo del simbolo AB, per indicare un vettore e uno scalare, che può facilmente produrre qualche confusione, il traduttore si è permesso di modificare leggermente in alcuni punti, l'esposizione del testo.

vale a dire AP si trasforma in AQ coll'aggiunta di PQ. Quindi, il vettore PQ rappresenta un incremento di AP, che possiamo chiamare incremento *diretto*. Congiunto P con P', PQ risulta eguale alla somma del vettore P'Q, precedentemente considerato, e di PP'. Supponendo l'angolo PAP' estremamente piccolo, PP' riuscirà perpendicolare ad AP; e, in tal caso, potremo rappresentare questa parte dell'aumento con $\sqrt{-1}\,.\,\rho$.AP, dove ρ esprime il rapporto scalare del segmento PP' al segmento AP. Dividendo per AP, si ottiene $\sqrt{-1}\,.\,\rho$ espressione dell'aumento relativo; e perciò, quando un vettore gira, l'aumento che riceve, ad ogni istante, in direzione perpendicolare, riferito al valore iniziale, si rappresenterà con una quantità scalare, moltiplicata pel simbolo $\sqrt{-1}$.

Ora veniamo al caso del circolo che ci siamo proposti di considerare. Sia OP la posizione acquistata dal raggio,

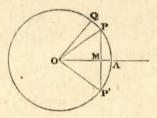



Fig. 79.

quando, partendo da OA, ha descritto l'angolo θ, e OQ una posizione consecutiva vicinissima, per modo che l'angolo POQ sia estremamente piccolo. L'arco PQ coinciderà sensibilmente colla sua corda, e questa retta si potrà considerare come ad angolo retto con OP. Quindi, per ottenere

OQ, si deve aggiungere ad OP il passo PQ in direzione perpendicolare. Siccome l'archetto PQ è misurato dal prodotto del raggio del circolo per l'angolo POQ (pag. 168), il rapporto scalare del segmento PQ al segmento OP sarà rappresentato dallo stesso angolo POQ, e da ciò concludiamo, per quanto precede, che l'incremento che riceve OP, riferito al valore iniziale OP, sarà $\sqrt{-1} \times$ angolo POQ.

Ciò posto, osserviamo che OP, siccome ogniqualvolta, girando intorno ad O, descrive un determinato angolo φ, riesce moltiplicato per una stessa quantità, $\cos\varphi + \sqrt{-1} \sin\varphi$, secondo la definizione (vedi pag. 206), cresce in ragione logaritmica. I precedenti risultati ci permettono di determinarla. Essa difatti sarà espressa dal rapporto dell'aumento, che riceve OP, descrivendo l'angolo POQ, al valore iniziale OP, diviso pel rapporto dell'angolo POQ all'angolo unitario. Ora si è trovato che quel primo rapporto è $\sqrt{-1} \times$ angolo POQ; e, per conseguenza, la ragione logaritmica in discorso sarà $\sqrt{-1}$. Perciò il risultato, che si ottiene, facendo girare un vettore, inizialmente rappresentato dall'unità, di un angolo eguale all'unità, si può rappresentare *simbolicamente* con $e^{\sqrt{-1}}$, e quello, che si ottiene, facendolo girare di un angolo θ, con $e^{\sqrt{-1}\theta}$ (cfr. pag. 210), donde concludiamo

$$\mathrm{OP} = \mathrm{OA}.e^{\sqrt{-1}\theta}.$$

Descriviamo PM perpendicolare ad OA, e prolunghiamola finchè incontra di nuovo il circolo, nel punto P'. Per ragione di simmetria, MP e MP' avranno la stessa lunghezza.

Inoltre,

$$\text{OP} = \text{OM} + \text{MP}$$
$$\text{OP}' = \text{OM} + \text{MP}'.$$

Ora, il rapporto scalare della lunghezza di OM e di MP a quella di OA è rispettivamente $\cos\theta$ e $\sin\theta$; quindi

$$\text{OM} = \cos\theta\,.\,\text{OA}; \quad \text{MP} = \sqrt{-1}\,.\,\sin\theta\,.\,\text{OA},$$

donde segue

$$\text{OP} = \text{OA}\ (\cos\theta + \sqrt{-1}\ \sin\theta)$$
$$\text{OP}' = \text{OA}\ (\cos\theta - \sqrt{-1}\ \sin\theta).$$

D'altra parte, l'angolo P'OM è eguale a POM ma, secondo la convenzione stabilita, di senso opposto, e perciò rappresentato da $-\theta$, per modo che

$$\text{OP}' = \text{OA}.e^{-\sqrt{-1}\theta}.$$

Confrontando le due espressioni così trovate di OP e di OP', ne deduciamo i risultati simbolici

$$\left.\begin{aligned} e^{\sqrt{-1}\theta} &= \cos\theta + \sqrt{-1}\ \sin\theta \\ e^{\sqrt{-1}\theta} &= \cos\theta - \sqrt{-1}\ \sin\theta \end{aligned}\right\} (1).$$

Si ha poi, perchè $\text{MP} + \text{MP}' = 0$,

$$\text{OP} - \text{OP}' = 2\ \text{PM}$$
$$\text{OP} + \text{OP}' = 2\ \text{OM},$$

donde

$$\left.\begin{aligned} e^{\sqrt{-1}\theta} - e^{-\sqrt{-1}\theta} &= 2\sqrt{-1}\sin\theta \\ e^{\sqrt{-1}\theta} + e^{-\sqrt{-1}\theta} &= 2\cos\theta \end{aligned}\right\} \quad (2).$$

Queste relazioni furono scoperte da Eulero. Le (2) sono prive di senso, quando $\sin\theta$ e $\cos\theta$ si considerano come semplici rapporti numerici. Invece, hanno un significato chiaro e preciso le (1), quando ciascun membro di esse si considera come simbolo di un' operazione. Così, $\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta$, applicato al passo unitario, indica di farlo girare di un angolo θ, mantenendone invariata la lunghezza; d'altra parte, $e^{\sqrt{-1}\theta}$, applicato al passo medesimo, lo fa crescere in ragione logaritmica, colla ragione unitaria, *perpendicolarmente* a sè stesso, mentre descrive l'angolo θ; e la prima delle due relazioni (1) esprime che le due operazioni producono lo stesso risultato.

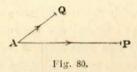
§ 15. *Sulla moltiplicazione dei vettori.*

A suo luogo, abbiamo trattato del modo di sommare i vettori, ed esaminato l'operazione rappresentata dal rapporto di due vettori; ora, si presenta spontanea la domanda: Non si può attribuire alcun significato al prodotto di due vettori?

Se entrambi i vettori si considerano come numeri complessi, o come espressioni di un' operazione, si è veduto (pag. 228 e 229) che il loro prodotto rappresenta un nuovo numero complesso, o un'operazione risultante. Si è anche veduto che cosa significa il prodotto in discorso, quando

un vettore esprime un' operazione, e l'altro un passo; in questo caso, esso indica che il passo va girato di un certo angolo, e stirato in un certo rapporto. Ma, nè l'uno nè l'altro dei due casi ora nominati vale a spiegare che cosa si deve intendere per prodotto di due passi, ciascun dei quali definisce la posizione relativa di una coppia di punti.

I due passi siano AP e AQ, per modo che si tratti di determinare il significato del prodotto AP.AQ. Se AP e AQ

Fig. 80.

fossero semplici quantità scalari, il loro prodotto rappresenterebbe la quantità parimente scalare, che misura il rettangolo contenuto dai due segmenti considerati. Ma non è cosi facile riconoscerne il significato, quando ad AP, AQ, si attribuisce *direzione,* non che grandezza.

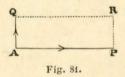



Fig. 81.

Nel caso che AP e AQ siano ad angolo retto (fig. 81), sembra naturale di conservare al prodotto AP.AQ il significato di area del rettangolo contenuto da AP e da AQ, ossia della figura QAPR. Ora, vediamo in qual modo si può generare quest' area. Supposto che il passo AQ si

movesse parallelamente a sè stesso, e in modo che il suo estremo A si appoggiasse al passo AP, è chiaro che, mentre questo estremo descriverebbe AP, esso genererebbe il rettangolo QAPR. Perciò, nel caso che AP e AQ siano ad angolo retto, il loro prodotto si può interpretare nel modo seguente:

Per trovare il prodotto AP.AQ si deve movere AQ parallelamente a sè stesso, in modo che l'estremo A percorra il passo AP; l'area così descritta da AQ rappresenta il valore del prodotto considerato.

È chiaro che questa interpretazione, quantunque suggerita dal caso che l'angolo PAQ sia retto, non è menomamente vincolata alla grandezza di questo angolo. Supposto che esso non sia retto, la figura descritta secondo la regola precedente sarà il parallelogrammo contenuto dai lati AP e AQ. Quindi, possiamo togliere quella restrizione, senza che la precedente interpretazione cessi di fornire un significato perfettamente intelligibile del prodotto AP.AQ.

Resta però da risolvere una difficoltà. Un'area è una quantità *diretta* (pag. 157), la cui direzione dipende dal modo in cui si descrive il perimetro. Secondo la nota convenzione, l'area QAPR sarà positiva, se il perimetro si

Fig. 82.

descrive in senso contrario a quello degl'indici dell'orologio, ossia da A in P; e questa è la direzione del passo AP, o, se vogliamo, quella in cui si move il secondo passo.

Ciò posto, il prodotto AP.AQ sarà l'area QAPR, presa col segno indicato dal passo AP.

Il prodotto AQ.AP si otterrà, facendo movere il passo AP parallelamente a sè stesso, lungo AQ, e perciò sarà egualmente rappresentato dall'area del parallelogrammo contenuto da AP e da AQ; ma il segno che si deve applicare a quest'area dev'essere quello che indica AQ, per modo che il prodotto in discorso sarà l'area PAQR.

Per la nota convenzione sul segno delle aree,

$$\mathrm{PAQR} = -\,\mathrm{QAPR},$$

Quindi

$$\mathrm{AQ.AP} = -\,\mathrm{AP.AQ};$$

donde apparisce che, adottando la precedente interpretazione, il prodotto di due vettori non obbedisce alla legge commutativa (pag. 10).

Se si suppone che l'angolo PAQ si annulli, e che il vettore AQ diventi eguale ad AP, è chiaro che si annullerà anche l'area del parallelogrammo contenuto dai due vettori. Quindi, moltiplicando un vettore per sè stesso, si otterrà per prodotto zero, ossia

$$\mathrm{AP.AP} = (\mathrm{AP})^2 = 0.$$

Presa una serie di vettori, α, β, γ, δ, ecc., per quanto precede, sussisteranno fra essi tante relazioni dei tipi seguenti:

$$\begin{array}{llll} \alpha^2 = 0, & \beta^2 = 0, & \gamma^2 = 0, & \delta^2 = 0, \text{ ecc.} \\ & \alpha\beta = -\,\beta\alpha, & \alpha\gamma = -\,\gamma\alpha, & \alpha\delta = -\,\delta\alpha, \text{ ecc.} \\ & & \beta\gamma = -\,\gamma\beta, & \beta\delta = -\,\delta\beta, \text{ ecc.} \\ & & & \gamma\delta = -\,\delta\gamma, \text{ ecc.} \end{array}$$

Grassmann fu il primo che si valse di una serie di quantità collegate da queste relazioni, e le chiamò *unità alternate*.

Il lettore riconoscerà immediatamente come le unità alternate abbiano un'algebra affatto speciale; così, per esempio, il prodotto si sottrae alla legge commutativa, o, se vogliamo, obbedisce, in vece che ad essa, ad un'altra, in virtù della quale, il segno si cambia, scambiando di posto due fattori. Ciò lo trarrà a riflettere come le regole dell'aritmetica, che forse egli supponeva si estendessero ad ogni specie di quantità simboliche, non abbiano vigore che nel dominio relativamente ristretto delle grandezze scalari. Coll'estendere il significato dei simboli, per mezzo della successiva generalizzazione, diventa necessario di considerarle come pure convenzioni, e perfino di lasciarle interamente da parte.

$2 \times 2 = 0$, e $2 \times 3 = -3 \times 2$ sono un pretto assurdo, se 2 e 3 si considerano come numeri; ma, se a questi segni si attribuisce il significato di passi diretti posti in un piano, diventano relazioni, alle quali il buon senso non trova più da movere alcuna obbjezione.

Prendiamo due unità alternate, α e β, e interpretiamo la quantità $a\alpha + b\beta$, dove a e b sono grandezze scalari. Se OA (fig. 83) è il vettore α, $a\alpha$ significa che OA si deve stirare nel rapporto di a ad 1, deducendone in tal modo un altro vettore, che rappresenteremo con OA′. Ad OA′ si deve poi aggiungere il vettore OB′, dedotto, in modo analogo, da OB, per mezzo della trazione b. Quindi, fatto A′P = OB′, la quantità $a\alpha + b\beta$, che si chiama un *numero alternato*, sarà rappresentata dal vettore OP. Sommando i risultati ottenuti, applicando le trazioni a' e b'

alle unità alternate α e β, si otterrà un altro numero alternato, $a'\alpha + b'\beta$, che sarà rappresentato da OQ. Analogamente, si potrebbero sommare i risultati ottenuti,

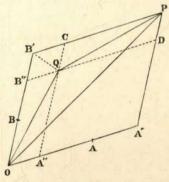



Fig. 83.

applicando determinate trazioni a tre unità alternate, α, β, γ, e si formerebbero così numeri alternati composti di tre termini (della forma $a\alpha + b\beta + c\gamma$); e via discorrendo. Il *prodotto* di tanti numeri alternati quante sono le unità alternate, che entrano a comporli, nella moderna teoria delle quantità sostiene una parte importantissima: e si chiama un *determinante*. Noi ci limiteremo a considerare il caso di un determinante formato mediante due unità. Un determinante di questo genere sarà rappresentato dal prodotto OP.OQ, che, secondo le precedenti convenzioni, è eguale all'area del parallelogrammo contenuto da OP e da OQ (fig. 83), o al doppio di quella del triangolo QOP (pag. 145). Descriviamo da Q le rette CQA'' e DQB'' rispettivamente parallele ad OB e ad OA; allora OA'' $= a'\alpha$, e OB'' $= b'\beta$. Congiungiamo B' con Q; il doppio del

triangolo B′Q P sarà eguale al parallelogrammo B″P. Quindi, aggiungendo a entrambe queste figure il parallelogrammo A′B″, si trova che il doppio del triangolo B′QP, e il parallelogrammo A′B″, presi insieme, formano un'area eguale a quella del parallelogrammo B′A′, o al doppio di quella del triangolo B′OP. Ma B′OP è eguale alla somma dei triangoli OQB′, B′QP e OPQ. Segue da ciò che il parallelogrammo A′B″ dev'essere eguale al doppio del triangolo OPQ aumentato del doppio del triangolo OQB′. Ora, due volte questo ultimo triangolo fa come il parallelogrammo B′A″. Quindi la differenza fra l'area di A′B″ e quella di B′A″ è due volte l'area di OPQ. Il parallelogrammo A′B″ si ricava da AB, applicandovi le due trazioni a e b' parallele ai lati, per modo che la sua area è ab' volte quella di AB; per ragione analoga, l'area di B′A″ è ba' volte quella di AB. Alla sua volta, l'area di AB rappresenta il prodotto $\alpha\beta$. Quindi l'identità

$$2\text{OPQ} = \text{A}'\text{B}'' - \text{B}'\text{A}''$$

si potrà leggere così:

$$(a\alpha + b\beta)\,(a'\alpha + b'\beta) = (ab' - a'b)\,\alpha\beta\,;$$

ossia, il determinante considerato è eguale all'area del parallelogrammo contenuto dalle unità alternate ingrandito nel rapporto di $ab' - a'b$ ad 1. Si vede chiaramente che il determinante in discorso risulterà nullo, quando sarà $ab' - ba' = 0$, ossia $a/b = a'/b'$. In questo caso, per le proprietà dei triangoli simili, P e Q giacciono sopra una stessa retta passante per O, e perciò OP.OQ deve necessariamente annullarsi.

I determinanti formati per mezzo di tre unità alternate possiedono proprietà analoghe, che il lettore potrà trovare da sè, senza troppa difficoltà. In questo caso, si trova una relazione geometrica fra certi volumi, che si deducono l'uno dall'altro, per mezzo di trazioni, nel modo che fu spiegato a pag. 163 (*).

§ 16. *Altra interpretazione del prodotto di due vettori.*

Secondo l'interpretazione alla quale siamo arrivati nel precedente paragrafo, il prodotto di due vettori è un'area: o, conformemente ad una convenzione a suo luogo stabilita (pag. 158), un altro passo diretto, o vettore, perpendicolare al piano, in cui giacciono i due vettori che compongono il prodotto.

Quella è una legittima interpretazione; ma il lettore deve ricordare che tale risultato non fu ottenuto che *mediante una convenzione*, e cioè che si è ammesso che l'area di un certo parallelogrammo fosse l'espressione del prodotto dei due vettori considerati. Le nostre conclusioni stanno soltanto finchè si rispetta quella convenzione. Avremmo potuto adottarne anche un'altra, e allora saremmo arrivati a risultati diversi. Ora, gioverà dedurre

(*) Vado debitore al mio amico Sig. J. Rose-Innes dell'idea d'introdurre le precedenti considerazioni sui determinanti. Aggiungerò che se, al modo di Grassmann, si trattano le unità alternate come punti, e un numero alternato formato con esse, come il loro centroide caricato, un determinante del secondo ordine è geometricamente rappresentato da una lunghezza: per modo che sono i determinanti del *quarto* ordine, che, interpretati geometricamente, rappresentano un volume.

le conseguenze di una nuova convenzione: sia pure al solo scopo d'imprimere nella mente del lettore il fatto che gli assiomi fondamentali dei varii rami della matematica sono fondati sopra convenzioni, anzi che sopra verità assolute.

Perciò, supponiamo che, trattandosi d'interpretare il prodotto AP.AQ, AP si consideri come il passo diretto, che

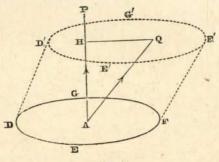



Fig. 81.

rappresenta l'area DEFG. Quest'area sarà perpendicolare ad AP. Ciò posto, noi possiamo adottare la convenzione che il prodotto AP.AQ significhi il volume, che genera il vettore AQ, movendosi parallelamente a sè stesso, e in modo che la sua estremità A prenda nel piano DEFG ogni posizione possibile. Questo volume sarà il pezzo di cilindro obliquo, avente per base DEFG, intercettato dal piano parallelo alla base condotto pel punto Q. Per quanto abbiamo veduto (pag. 166), il volume di questo solido è misurato dal prodotto della base per l'altezza, vale a dire per la distanza perpendicolare AH dei due piani. Ora, siano r e ρ le grandezze scalari di AP e di AQ, e $\theta =$ l'angolo PAQ.

Allora AH $= \rho \cos\theta$, e il volume, che esprime AP.AQ, siccome r rappresenta il numero di unità di area contenuto in DEFG, sarà $r\rho \cos\theta$. Un volume è una quantità puramente numerica, dotata di grandezza, non di direzione; e perciò, secondo la nuova convenzione, il prodotto di due vettori è una quantità puramente *scalare:* risultato affatto diverso dal precedente.

Inoltre, poichè r e ρ sono semplici numeri, $r\rho = \rho r$; e perciò AP.AQ $= r\rho \cos\theta = \rho r \cos\theta =$ AQ.AP, dove AQ si considera come il passo diretto, che rappresenta un'area contenente ρ unità superficiali. Quindi, in questo caso, il prodotto di due vettori obbedisce alla legge commutativa: altro risultato diverso dal precedente. Concludiamo che il prodotto di due vettori si potrà considerare indifferentemente come un vettore, ed una quantità che non obbedisce alla legge commutativa, e come uno *scalare*, ed una quantità che obbedisce alla legge medesima. Noi possiamo adottare liberamente l'una o l'altra convenzione, purchè seguitiamo poi a mantenerla.

Questo attribuire ad un termine o ad un simbolo una diversa interpretazione, è un metodo, nel campo delle scienze esatte, assai fecondo. Ogni nuova interpretazione è un'occasione per stabilire nuove leggi fondamentali: e queste si possono assumere per base di un nuovo calcolo (a seconda del caso, algebrico o geometrico). I risultati di questo calcolo non reggeranno necessariamente che per le quantità che obbediscono a quelle leggi fondamentali. Così, le leggi a cui obbediscono i numeri, le quali furono credute per molto tempo i soli fondamenti possibili di una teoria della quantità, non altrimenti che i postulati d'Euclide, nel caso dello spazio, si trova che si

verificano solamente nei limiti delle grandezze scalari. Quando si estende il concetto di quantità, annettendovi direzione e posizione, queste leggi cadono in difetto; e si è obbligati ad ammettere che una od un certo numero di esse non regge più, e deve cedere il posto ad altre di forma diversa. In tal caso, modificando le antiche, o sostituendovene altre, noi adottiamo nuove leggi conformi al più esteso significato attribuito al concetto di quantità e ai simboli corrispondenti.

§ 17. *Posizione nello spazio a tre dimensioni.*

Finora non abbiamo considerato che la posizione di punti appartenenti ad un piano; poco abbiamo da cambiare, per passare da questo caso a quello che la posizione di un punto P relativa ad un punto A sia definita da un passo AP preso nello spazio.

Se non che osserveremo innanzi tutto che, mentre, nel piano, due punti, A e B, bastano per determinare la posizione di un terzo, P (pag. 188), per fissare la posizione di un punto, P, nello spazio, occorre che ne ne siano dati tre, A, B, C, non posti in linea retta. Finchè non si conoscono che le distanze di P da due punti, A e B, non si sa altro se non che P deve trovarsi sopra un certo circolo, che ha il centro sulla retta AB, e il cui piano è perpendicolare alla retta stessa (*); per definire la posizione di P sopra questo circolo, occorre di conoscere la sua distanza

(*) Evidentemente il circolo secondo il quale si segano le due sfere aventi per centro i punti A e B, e raggi rispettivamente eguali alle due distanze date AP e BP. *Nota del Traduttore.*

da un terzo punto, c. Così, per determinare la posizione nello spazio, bisogna avere la base di almeno tre punti non allineati (o di qualche figura geometrica equivalente). Per questa proprietà, lo spazio in cui viviamo si distingue essenzialmente dagli spazii a due dimensioni, dove per definire la posizione di un punto, basta conoscerne due (pag. 188): e riceve il nome di spazio a tre dimensioni.

Tre punti definiscono un piano; e perciò, dati tre punti A, B, C, nello spazio, il piano che li contiene è un piano determinato, che divide tutto lo spazio per mezzo. Ogni punto, P, di cui si tratti di fissare la posizione, deve trovarsi nell'una o nell'altra metà. Per distinguerle, gioverà chiamare l'una la metà *superiore* al piano, l'altra, l'*inferiore*. Sia PN la perpendicolare calata da P sul piano; dato che si sappia trovare il punto N nel piano ABC, perchè la posizione di P riesca perfettamente determinata, non occorrerà che di decidere, se la lunghezza PN dev'essere misurata sopra o sotto il piano. Perciò, converremo che, quando questa lunghezza si trova al di sopra del piano, debba considerarsi come *positiva*, e, quando si trova al

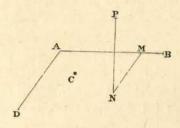



Fig. 85.

di sotto, come *negativa*. Per quanto alla posizione del punto N, donde dipende quella di P, essa potrà essere defi-

nita mediante uno qualunque dei metodi di cui ci siamo valsi per fissare la posizione in un piano. Ciò posto, descritto NM (fig. 85) perpendicolare ad AB, la via per arrivare ad M si potrà indicare così: si descriva lungo AB un passo AM, per esempio, di x unità: quindi, mantenendosi nel piano ABC, in direzione perpendicolare, e a destra di AB, un passo MN di y unità: finalmente, da N, si percorra, andando *insù*, in direzione perpendicolare al piano ABC, la distanza NP, contenente, ad esempio, z unità. Si arriverà così allo stesso punto, P, come descrivendo direttamente il passo AP. Se x fosse stato negativo, si sarebbe dovuto fare, partendo da A, un passo indietro; se y fosse stato negativo, si sarebbe dovuto fare un passo, sempre perpendicolare ad AB, ma a sinistra; finalmente, se z fosse stato negativo, si sarebbe dovuto fare un passo perpendicolare al piano ABC, andando *ingiù*. Il lettore si convincerà facilmente che, attenendosi a questa regola, si potrà passare da A a qualunque altro punto dello spazio.

Rappresenti i il passo unitario lungo AB, j il passo unitario perpendicolare ad AB, nel piano ABC, e finalmente k il passo unitario perpendicolare a questo piano, diretto insù. Allora, potremo porre

$$AP = x.i + y.j + z.k,$$

dove x, y, z sono quantità scalari, aventi solo grandezza e segno, mentre i, j, k sono vettori, in direzioni rispettivamente perpendicolari.

Il passo AP si può considerare come la diagonale di un solido rettangolare (un *parallelepipedo*, come lo abbiamo chiamato a pag. 162), ed è chiaro che, percorrendo tre

lati qualunque non paralleli fra loro, si arriverà sempre allo stesso punto P. Ora, ciò val quanto dire che l'ordine in cui si prendono i passi diretti $x.i$, $y.j$ e $z.k$ è indifferente.

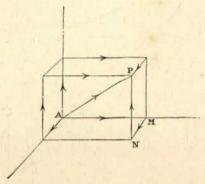



Fig. 86.

Il lettore riconoscerà facilmente come la somma di un numero qualunque di passi successivi descritti nello spazio, sia equivalente al passo che congiunge l'origine del primo col termine dell'ultimo; e da ciò si può dedurre una serie di proposizioni sui passi nello spazio simili a quelle che abbiamo dimostrato nel caso dei passi nel piano.

Dividendo lo spazio in tanti cubetti per mezzo di tre sistemi di piani rispettivamente perpendicolari, potremo costruire delle superficie, nel modo stesso che, valendoci della divisione del piano in quadrati, abbiamo costrutto delle curve. In questo caso, prenderemo ad arbitrio i valori di x e y, e supporremo che la grandezza del terzo passo, presenti una determinata relazione con quelle dei primi due. Per esempio, supponendo che il rettangolo

contenuto da z e da una lunghezza costante a si mantenga eguale alla differenza dei quadrati costruiti sopra x e y, ossia, simbolicamente, prendendo $az = x^2 - y^2$, si arriverà da A a P col passo

$$\text{AP} = x \,.\, i + y \,.\, j + \frac{x^2 - y^2}{a} \,.\, k.$$

I punti che si ottengono a questo modo risultano distribuiti sulla superficie in forma di sella, che abbiamo descritto a pag. 107; e perciò la precedente relazione fra x, y e z si dice l'*equazione* di una superficie di quella specie.

Ma, non potremmo ingolfarci nella teoria dei vettori nello spazio, senza oltrepassare di troppo i limiti che ci siamo imposti.

§ 18. *Sui vettori localizzati o rotori.*

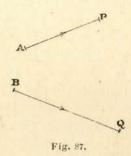
Finora abbiamo considerato la posizione di un punto P relativa ad un punto A, e l'abbiamo confrontata colla posizione di un altro punto Q relativa allo stesso punto A. Così, abbiamo considerato il rapporto e il prodotto di due passi AP e AQ.

Perciò si supponeva che i due passi considerati avessero un'estremità comune A, o almeno che si potessero spostare parallelamente a sè stessi, finchè un'estremità dell'uno e dell'altro coincidesse nel modo richiesto. Siffatti passi, come abbiamo detto a suo luogo, si chiamano *vettori.*

Ora supponiamo che, invece di confrontare la posizione di due punti P e Q per rispetto ad uno stesso punto, A,

si confronti la loro posizione relativa a due punti diversi, A e B. La posizione di P relativa ad A sarà definita dal passo AP, quella di Q relativa a B, dal passo BQ.

In questo caso, si osserverà che i passi AP e BQ possiedono, non solo grandezza e direzione, ma anche *posizione nello spazio*. Il passo AP ha una posizione nello spazio relativa a BQ; esso non indica più soltanto la posizione

Fig. 87.

di P relativa ad A, ma complessivamente occupa una posizione per rispetto al passo BQ. Questa *localizzazione*, non di un punto, P, per rispetto ad un altro punto, Q, ma di un passo, AP, per rispetto ad un altro, BQ, è un nuovo ed importante concetto. Un vettore localizzato si chiama un *rotore:* termine che allude alla parte sostenuta da queste quantità nella teoria dei corpi ruotanti (*).

(*) Clifford (*Preliminary Sketch of Biquaternions — Proceedings of the London mathematical Society*, vol. IV, pag. 383; e *Mathematical Papers*, London 1882, pag. 181) propone di chiamare *rotor* (abbreviato da *rotator*) « una quantità avente grandezza, direzione e posizione, il tipo più semplice della quale è una velocità di *rotazione* intorno ad un certo asse; » e aggiunge: « Un rotore sarà geometricamente rappresentato da una lunghezza proporzionale alla

Procuriamo di trovare quale operazione converte il rotore BQ nel rotore AP, o, in altre parole, proponiamoci il quesito: Che cos'è l'operazione $\frac{AP|}{|BQ}$?

Convertire BQ in AP significa ridurre BQ ad avere la stessa grandezza, e la stessa posizione di AP. Ora, la grandezza del primo rotore si renderà eguale a quella del secondo, mediante una trazione: e, come abbiamo veduto nel caso dei quaternioni (pag. 230), quest'operazione è rappresentata da un rapporto numerico, ossia da una quantità puramente scalare. Sia poi CD (fig. 88) la retta che misura la più breve distanza fra i rotori AP e BQ, ed è, per conseguenza, perpendicolare ad entrambi (*).

sua grandezza, misurata sopra il suo asse, in un certo senso. Un rotore AB ed un rotore CD saranno identici, quando si troveranno sulla stessa retta, e avranno la stessa grandezza e lo stesso senso; vale a dire, un vettore si può trasportare parallelamente a sè stesso dovunque si vuole, un rotore invece *solamente* lungo la propria retta. » Nel seguito del paragrafo il testo adotta tacitamente questa definizione. *Nota del Traduttore.*

(*) Che la più breve distanza di due rette debba essere perpendicolare ad entrambe, si può dimostrare nel seguente modo. Immaginiamo che alle due rette siano sostituite due verghe sottilissime e perfettamente levigate: e supponiamo che due anelli rispettivamente infilati sulle due verghe, siano collegati da un filo elastico teso. Evidentemente i due anelli scorreranno sulle verghe, finchè il filo si disporrà secondo la minima distanza; perchè a questa posizione corrisponde la minima tensione. Ora, supponiamo che in tal caso il filo non sia perpendicolare ad una delle verghe: per esempio, che l'angolo in C (fig. 88) non sia retto. Allora, mantenendo il filo fisso in E, si potrà spostare l'anello lungo la verga, da C fino in C′, in modo che l'angolo EC′C sia retto. L'angolo in C′ essendo retto, CE sarà il lato del triangolo ECC opposto all'angolo più grande, e sarà

Per ridurre BQ nella posizione di AP, faremo così: Comincieremo col girare BQ intorno a CD, di un certo an-

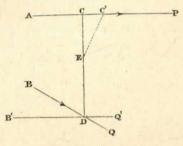



Fig. 88.

golo, finchè prenda la posizione B'Q', e acquista la direzione di AP; poi faremo scorrere B'Q', parallelamente a sè stesso lungo la medesima retta CD, finchè ai due rotori corrisponda una medesima posizione (*); in seguito a che, se vorremo che essi coincidano punto per punto, faremo scorrere ulteriormente B'Q', nella direzione di AP, finchè i punti B' ed A ne formino uno solo.

Ora una rotazione intorno ad un asse in direzione perpendicolare, e uno spostamento lungo l'asse medesimo, sono le operazioni, che si eseguiscono sul taglio che porta la testa di una vite, per introdurla in un pezzo di legno, e sul manico di un cavatappi, per forzarlo in un tu-

quindi maggiore di C'E. Quindi la lunghezza del filo C'E + ED sarà minore della lunghezza CD, e CD non sarà la minima distanza delle due verghe, come si era supposto. Concludiamo che la più breve distanza di due rette, dev'essere perpendicolare ad entrambe.

(*) Vedasi la nota a pag. 251.

Nota del Traduttore.

racciolo. Il manico, in un caso, e il taglio, nell'altro, non solo girano, ma si avanzano nella direzione dell'asse della vite. Siffatto moto, simultaneamente lungo un asse e intorno ad esso, si chiama un *moto elicoidale.* Quando l'elica ha un andamento uniforme, il rapporto fra lo spazio percorso nel senso dell'asse, e l'angolo contemporaneamente descritto dalla testa della vite, è costante; così, un ordinario cavatappi, facendo due giri, si avanza il doppio che facendone uno solo; quel rapporto si chiama il *passo* della vite o dell'elica. Ora, vediamo come si possano applicare questi concetti all'operazione, per mezzo della quale un rotore BQ si riduce nella posizione di un altro rotore AP. Perciò, supponiamo che sopra una verga disposta secondo la minima distanza dei due rotori, CD, sia incisa un'elica il cui passo sia eguale al rapporto di CD all'angolo QDQ'. Allora, se s'immagina che il rotore BQ sia fissato ad una madrevite adattata all'elica, quando occupa la posizione indicata dal punto D, facendo descrivere a BQ l'angolo QDQ', la madrevite coll'annesso rotore (per la scelta speciale del passo), percorrerà la distanza CD; e, per conseguenza, BQ si ridurrà nella direzione e nella posizione di AP.

Apparisce da quanto precede che un rotore, BQ, si riduce a coincidere con un altro rotore, AP, per mezzo di una trazione, susseguita da uno spostamento elicoidale secondo una certa elica. Un'elica implica direzione, posizione e passo; uno spostamento elicoidale (come quello di una madrevite) secondo l'elica, implica di più una grandezza, e cioè quella dell'angolo di cui si deve girare la madrevite. Una grandezza associata con un'elica costituisce ciò che il nostro autore ha chiamato un *mo-*

tore (*), perchè rappresenta il moto istantaneo più generale di un corpo rigido. Quindi l'operazione mediante la quale un rotore si trasforma in un altro, è espressa da un motore combinato con una trazione. Questa operazione è, per rispetto a due rotori, ciò che un quaternione, per rispetto a due vettori. Il motore sostiene, nello studio di parecchi rami della fisica, una parte importantissima, e perciò gioverà al lettore di farsene un chiaro concetto.

La somma di due vettori è, come abbiamo veduto a pag. 181, un terzo vettore; invece la somma di due rotori è generalmente un motore: e, soltanto in casi speciali, diventa un rotore od un vettore. La geometria dei rotori e dei motori, della quale non abbiamo potuto dare che un cenno, forma la base di tutta la teoria moderna dell'equilibrio relativo (Statica), e del movimento relativo (Cinematica e Cinetica) dei sistemi invariabili.

§ 19. *Sulla curvatura dello spazio.*

Oggetto principale di questo capitolo è stata la posizione di un punto P relativa ad un punto A. Da ciò siamo stati naturalmente condotti a considerare la geometria dei passi; poichè, fatta l'ipotesi che ogni posizione è relativa, ne viene che essa non si potrà definire altrimenti che per mezzo di passi. La relatività della posizione è un postulato, a cui siamo giunti, considerando i metodi che servono abitualmente per determinare la posizione: i quali non dànno mai altro che posizione relativa. Così, *la relatività della posizione è un postulato dedotto dall'espe-*

(*) Op. cit.

rienza. Il rimpianto prof. Clerk-Maxwell ne esprimeva l'importanza colle seguenti parole:

Noi non abbiamo, così dello spazio come del tempo, che cognizioni relative. Tornerà facile a chi si sia fatto l'abitudine di mettere insieme delle parole, senza darsi la pena di formare i concetti corrispondenti, fabbricare un'antitesi fra questa cognizione relativa e la così detta cognizione assoluta, e citare la nostra ignoranza della posizione assoluta di un punto come esempio della limitazione delle nostre facoltà. Ma chiunque si provi ad immaginare le condizioni di una mente, che avesse la coscienza di conoscere la posizione assoluta di un punto, finirà per appagarsi della nostra cognizione relativa (*).

È tanto importante di riconoscere fin dove noi possiamo essere sicuri della verità dei nostri postulati, che io invito il lettore a ritornare sul concetto di posizione, per considerarlo da un diverso punto di vista; anzi voglio perfino invitarlo a provarsi a prendere in esame le condizioni di quella mente, a cui accenna il prof. Clerk-Maxwell nell'ultima proposizione del brano citato.

Supponiamo d'avere un tubo sottilissimo, piegato in forma di circolo, nel cui vano si trovi un verme di lunghezza AB (fig. 89). Nel caso estremo che il vano del tubo e il verme si suppongano infinitamente sottili, fissato *un* punto C, nel tubo, la lunghezza dell'arco CA basterà per determinare la posizione del verme; e perciò lo spazio considerato si ridurrà ad una dimensione. Supposto che il verme sia incapace di percepire checchessia fuori dal proprio spazio tubulare, esso potrebbe però venire a qualche

(*) *Matter and Motion,* pag. 20. Vedasi anche la pregevolissima traduzione italiana, con proemio e note del prof. Giovanni Cantoni - Dumolard 1881, pag. 9.

conclusione intorno alla natura di questo spazio, quando avesse la facoltà di distinguere sulla parete del tubo un segno c. Così, ritrovando questo segno, riconoscerebbe di ritornare al punto c; e allora, dalla circostanza, che camminando continuamente nel tubo, ritroverebbe di tanto in tanto il segno medesimo, dedurrebbe, senza esitazione, il postulato che il proprio spazio è finito. Inoltre, poichè il circolo ha dappertutto la stessa forma, il verme avrebbe sempre lo stesso *grado di flessione,* e perciò supporrebbe senz'altro che il suo spazio è *uniforme,* ossia che possiede le stesse proprietà in ogni punto. Noi facciamo

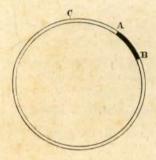



Fig. 89.

un'ipotesi affatto simile, quando, estendendo a tutto lo spazio i postulati della geometria euclidea, che, per quanto c'insegna l'esperienza, si verificano sensibilmente nello spazio che immediatamente ne circonda, ammettiamo che il nostro spazio a tre dimensioni è uniforme. Se non che il verme farebbe quel postulato con maggior ragione, perchè del proprio spazio ad una dimensione avrebbe esplorato ogni parte. Finalmente, il verme asserirebbe

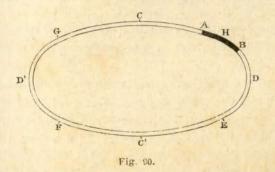
che la posizione è relativa, e determinerebbe la propria, per mezzo dell'arco compreso fra C ed A.

Ora, modifichiamo alquanto le nostre ipotesi, e supponiamo che il verme sia incapace di fare, o di distinguere, un segno sul tubo. In tal caso ci persuaderemo facilmente ch'esso non potrebbe riconoscere se il suo spazio fosse limitato o no. Difatti, da una parte, non potrebbe mai accorgersi d'aver compiuto un giro; dall'altra, siccome possederebbe sempre uno stesso grado di flessione, *ne spiegherebbe la sensazione con una condizione naturale del proprio organismo, anzi che attribuirla ad un'influenza esercitata dallo spazio:* e per conseguenza non saprebbe distinguere il moto in uno spazio di curvatura costante (un circolo) dal moto in uno spazio di curvatura nulla, altrimenti chiamato *omaloidale* (una linea retta). Quindi avrebbe le migliori ragioni per supporre che il suo spazio fosse infinito, e per credere di camminare in un tubo infinitamente lungo; che, se fosse improvvisamente trasportato da uno spazio all'altro, attribuirebbe la sensazione prodotta dalla diversa flessione a qualche alterazione del proprio organismo.

Per conseguenza, in uno spazio ad una dimensione, di curvatura costante, la posizione è essenzialmente relativa e un essere, che non potesse percepire nulla fuori di esso, vi farebbe il postulato ch'esso è finito, oppure che è infinito, secondo che potesse, o non potesse, fissarvi un punto (*).

(*) Ciò suppone che lo spazio ad una dimensione di curvatura costante giaccia in un piano; la stessa conclusione non si applica ad uno spazio come quello dell'elica, il quale ha una curvatura costante, e pure non è finito.

Ora supponiamo che il verme si mova in un tubo di specie diversa; il quale, abbia, per esempio, la forma di quell'ombra del circolo, che abbiamo chiamato ellisse. In un tubo di questa forma il verme non avrebbe in ogni posto lo stesso grado di flessione: ne avrebbe il minimo in C (fig. 90), il massimo in D; e, nel passare dal primo punto al secondo, riceverebbe una successione di flessioni diverse; a ciascun punto H, compreso fra C e D, corrispondendone un grado speciale. In questo caso vi è dunque qualcosa che distingue ogni punto, H, della curva, indipendentemente dalla sua posizione relativa ad un punto fisso, come sarebbe C. Al punto H corrisponde un grado speciale di curvatura: e, noto che sia, la posizione di H sopra CD riuscirà immediatamente determinata. Così, il verme, in questo spazio, per mezzo della curvatura corrispondente ad ogni punto, potrebbe determinarne la posi-

Fig. 90.

zione *assoluta*. Esso avrebbe, in tal caso, il senso della differenza di curvatura: e potrebbe perfino formare una scala di curvature procedenti per intervalli eguali. A rappresentare lo zero di sì fatta scala sarebbe atta qualunque

curvatura: fissata la quale, ogn'altra sarebbe espressa da una quantità positiva o negativa, misurata a partire dallo zero, secondo che fosse maggiore o minore. Lo zero potrebbe anche rappresentare una curvatura puramente ideale, cioè non esistente nello spazio considerato, come sarebbe, per esempio, nel caso dell'ellisse, l'assoluta rettilineità, che il verme potrebbe concepire come un limite dei gradi presentati dall'esperienza (*).

Apparisce da ciò che, in uno spazio « a curvatura variabile », cioè non uniforme, la posizione non è essenzialmente relativa. Mentre, in uno spazio uniforme, è relativa la posizione, ivi sarà relativa la scala delle curvature, che serve per determinarla; ossia sarà relativa la misura delle sensazioni provate dal verme. Nel caso del tubo ellittico, in conseguenza della sua simmetria, vi sono quattro punti, come sarebbero H, E, F, e G, che hanno la stessa curvatura; ma H, F ed E, G si distinguono, per la ragione che il verme, facendo il giro del tubo nel senso indicato dalle lettere CHDE, in H e in F passerebbe da posti dove avrebbe una minor flessione a posti dove ne avrebbe una maggiore, mentre in E e in G avverrebbe il contrario; e perciò esso facilmente distinguerebbe l'una dall'altra le due coppie di punti. Invece, per l'eguaglianza delle curvature, potrebbe confondere i punti H e F. Anche quest'ultimo dubbio non sussisterebbe più, quando il verme si movesse in un tubo in forma di pera, come si vede nell'annessa figura; in tal caso non vi sarebbero che due punti aventi una stessa curvatura, i quali, essendo nel caso di H e G, si distinguerebbero facilmente nel modo precedentemente spiegato.

(*) I fisici possono richiamare lo zero assoluto di temperatura.

Da quanto precede siamo tratti a conchiudere che, in uno spazio ad una dimensione, di curvatura variabile, la

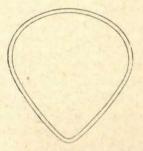



Fig. 91.

posizione non è necessariamente relativa. Se non che, a questo riguardo, resta da fare un'osservazione. Noi abbiamo supposto che il verme attribuisse il diverso grado di flessione alla diversa posizione occupata nello spazio; ora, esso percepirebbe un cambiamento di flessione con una modificazione del proprio stato fisico, o delle proprie sensazioni; e, per conseguenza, potrebbe facilmente cadere nell'errore di supporre lo spazio uniforme, e d'attribuire i cambiamenti della propria flessione, realmente dovuti alle diverse posizioni da esso occupate nello spazio, ad alterazioni periodiche (se si movesse uniformemente lungo il tubo), o irregolari (se andasse, in qualsiasi modo, innanzi e indietro), alle quali il suo organismo andasse soggetto. Analogamente, se lo spazio avesse una curvatura costante, la quale, per qualche causa esterna, potesse complessivamente cambiare, ed anche una curvatura diversa da punto a punto, capace di variare, in qualsiasi modo, col tempo, — due casi, di cui il lettore si formerà

un'idea, immaginando che il tubo sia di materia flessibile — il verme potrebbe attribuire il cambiamento della propria flessione tanto ad una modificazione della natura dello spazio, come ad un'alterazione delle proprie condizioni fisiche, indipendente dalla posizione da esso occupata. Segue da ciò che, in uno spazio ad una dimensione, di curvatura variabile, potrebbe essere fatto erroneamente il postulato che la posizione è essenzialmente relativa.

Risultati d'indole affatto analoga si ottengono, passando dal caso precedente a quello di uno spazio a due dimensioni. In uno spazio a due dimensioni perfettamente piano (così detto *omaloidale*), e cioè in un piano, una figura piana si potrà trasportare dovunque si voglia, senza alterarne per questo la forma. Se, per valerci di un'immagine analoga a quella del verme infinitamente sottile, supponiamo che in quello spazio si trovi una soglia, od altro pesce piatto, infinitamente schiacciato, questo pesce non potrebbe determinare la posizione, se non potesse stabilire, nel proprio spazio, dei termini; e tosto che avesse fissato due punti, sarebbe in grado di determinarvi la posizione *relativa*.

Ora invece supponiamo di prendere uno spazio a due dimensioni, il quale, come il precedente, sia perfettamente uniforme, ma abbia una certa incurvazione, e cioè la superficie di una sfera. Immaginiamo di stirare, e d'incurvare la nostra soglia, finchè si possa applicare a qualche parte di questa superficie. Essendo la superficie medesima uno spazio uniforme, la soglia vi si potrà movere, in modo qualunque, senza che occorra di modificare la flessione e la trazione primitiva. Se non potesse fissare sulla superficie alcun segnale, essa non potrebbe determinarvi

la posizione di un punto; e, se ne potesse segnare almeno due, potrebbe determinarne la posizione *relativa*. Finalmente, al modo stesso che il verme nel tubo circolare, senza l'ajuto di segnali, essa supporrebbe a buona ragione che il suo spazio fosse infinito, ed anzi lo considererebbe come piano (omaloidale), prendendo per un fatto inerente alla propria costituzione fisica il grado costante di flessione e di trazione corrispondenti allo spazio medesimo.

Ora, passiamo a qualche spazio a due dimensioni, che non sia uniforme, come sarebbe, per esempio, la superficie in forma di sella che abbiamo considerato a pag. 107, la quale ha un'incurvazione variabile da punto a punto. In questo caso, il pesce, se si adattasse ad una parte della superficie, non si adatterebbe per questo a qualsiasi altra; e, per moversi, mantenendosi in quello spazio, dovrebbe incessantemente deformarsi. Cosi, ogni posto di questo spazio a due dimensioni si potrà definire per mezzo della flessione e della trazione particolare, che bisognerebbe applicare al pesce, perchè si adattasse alla superficie, in quel posto, ossia, per mezzo della *curvatura* della superficie, nel posto medesimo. Nelle superficie, che presentano una certa simmetria, vi saranno necessariamente posti di egual curvatura: e, in certi casi, il pesce potrebbe distinguerli, nel modo stesso che il verme distinguerebbe i punti d'egual curvatura del tubo ellittico. Invece, tali posti non vi saranno necessariamente nelle superficie irregolari. Cosi, noi siamo tratti a fare conclusioni simili a quelle alle quali siamo giunti nel caso di uno spazio ad una dimensione: La posizione in uno spazio a due dimensioni, che non è uniforme, si potrà determinare *assolutamente*,

per mezzo della curvatura. Basterebbe che il nostro pesce portasse con sè una scala indicante i gradi della flessione e della trazione, che corrispondono ad una certa serie di posizioni appartenenti alla superficie, e, per mezzo di essa, potrebbe determinare la propria posizione, nel relativo spazio, in modo assoluto. D' altra parte, esso potrebbe facilmente attribuire ogni cambiamento di flessione e di trazione ad alterazioni del proprio organismo, affatto indipendenti dalla posizione da esso occupata nello spazio. In tal caso, esso crederebbe d' avere la vita fisica più variata, di cambiare continuamente sensazioni, senza che in ciò avesse parte alcuna la natura geometrica dello spazio, in seno al quale esso vivrebbe; mentre giudicherebbe questo spazio perfettamente uniforme, e potrebbe perfino ridurlo « alla squallida infinità di un'omaloide » (*).

Così, dalle precedenti considerazioni sugli spazii ad una e a due dimensioni, risulta che, se questi spazii non sono uniformi (a maggior ragione non omaloidali), la loro curvatura permetterà di determinarvi la posizione assoluta. Se non che un essere, che vivesse in quelle dimensioni, colla maggior probabilità, attribuirebbe gli effetti della curvatura a modificazioni delle proprie condizioni fisiche, per nulla collegate coll'indole geometrica dello spazio.

Quale insegnamento si può ricavare, per analogia, da quanto precede, intorno allo spazio a tre dimensioni a cui noi apparteniamo? In primo luogo, noi ammettiamo che tutto il nostro spazio sia perfettamente *uniforme,* ossia che le figure solide non cambiino di forma nel passare, in seno

(*) Nel caso supposto di uno spazio a due dimensioni lo supporrebbe un piano. Cfr. Clifford, *Lectures and Essays*, vol. I, pag. 323.

ad esso, da una posizione all'altra. Noi fondiamo questo postulato dell'uniformità sui risultati che fornisce l'osservazione, in quella porzione limitata di spazio della quale noi siamo esperti (*). Ora, ammesso pure che le nostre osservazioni siano esatte, dal fatto che quella porzione di spazio è sensibilmente uniforme, non segue per nulla che *tutto* lo spazio egualmente lo sia (**). Tale supposizione è una pura estensione dogmatica all'ignoto di un postulato, che ha l'apparenza di essere conforme al vero in quella parte di spazio, che noi possiamo assoggettare all'esperienza. Ora, il fare delle asserzioni dogmatiche sull'ignoto è piuttosto da teologi del medio evo che da moderni scienziati. Sulla stessa base è fondata la supposizione ulteriore che il nostro spazio sia omaloidale. Quando asseriamo che il no-

(*) Qualcuno potrà pensare che il postulato della uniformità del nostro spazio sia fondato sul fatto che nessuno è mai riuscito finora a farsi un concetto geometrico qualsiasi della curvatura d'uno spazio. Prescindendo anche dal fatto che l'uomo è abituato ad ammettere molte cose, delle quali non può formarsi un concetto geometrico (i matematici ammettono i punti circolari all'infinito, i teologi, la transustanziazione), osserverò che noi non possiamo aspettarci che qualcuno riesca a farsi un concetto geometrico del proprio spazio, finchè non lo possa vedere da uno spazio ad un numero maggiore di dimensioni, ciò che significa che non vi riuscirà mai.

(**) Bisogna però osservare che dal fatto che *pare* che una figura solida mantenga sempre la stessa forma, mentre si sposta nella parte di spazio da noi conosciuta, non segue che la figura la mantenga *realmente*. I cambiamenti di forma relativi agli spostamenti, che noi possiamo eseguire, potrebbero essere così piccoli da sfuggire ai nostri sensi; e, supposto anche che avessero luogo, potrebbe darsi che fossero da noi attribuiti a « cause fisiche » — al calore, alla luce, al magnetismo — che sono forse semplici nomi, sotto i quali si celano altrettante variazioni della curvatura dello spazio.

stro spazio è uniforme, supponiamo che esso abbia una curvatura costante (come il circolo fra gli spazii ad una dimensione, e la sfera fra quelli a due); quando supponiamo inoltre che sia omaloidale, ammettiamo che questa curvatura sia nulla (come quella della retta, fra gli spazii ad una dimensione, e quella del piano, fra gli spazii a due). Questa supposizione figura nell'ordinaria geometria sotto la forma che due piani paralleli, e, in un medesimo piano, due rette parallele — vale a dire piani, e rette poste in uno stesso piano, che, per quanto si prolunghino, non s'incontrano mai — hanno, nel nostro spazio, una *reale* esistenza. Questa esistenza, che noi non possiamo evidentemente constatare, si ammette come un risultato fondato sull'esperienza di ciò che accade in una porzione limitata di spazio. Ora, se noi possiamo ammettere che quella parte di spazio della quale siamo esperti è sensibilmente omaloidale, non abbiamo per questo il diritto di estendere dogmaticamente questo postulato a *tutto* lo spazio. Una curvatura costante, impercettibile in quella parte di spazio che noi possiamo assoggettare all'esperienza, ed anche una curvatura che variasse in modo quasi insensibile col tempo, potrebbero egualmente soddisfare a quanto l'esperienza c'insegna che si verifica nello spazio da noi abitato (*).

(*) Il lettore avrà notato la circostanza che, quando si tratta di levare un pezzo di superficie, per adagiarlo sulla superficie medesima in un altro posto, bisognerà, in generale, stirarlo, non che piegarlo: per modo che, a definire la curvatura dei diversi punti d'una superficie come il paraboloide iperbolico, si è immaginato che concorra, colla flessione, la trazione, che dev'essere applicata ad un elemento superficiale, per adattarlo alla superficie in quel

Ma, spingendo l'analogia un passo più innanzi, poichè il verme e il pesce, che abbiamo supposto appartenere rispettivamente ad uno spazio ad una, e a due dimensioni, assai facilmente attribuirebbero gli effetti di un cambiamento della curvatura dei relativi spazii a modificazioni delle loro condizioni fisiche, domandiamoci, se non potrebbe darsi che, in modo simile, noi considerassimo come variazioni fisiche degli effetti realmente dovuti a cambiamenti della curvatura del nostro spazio; in altre parole, se alcune delle cause, che noi chiamiamo fisiche, e forse tutte, non fossero per avventura dovute alla costruzione geometrica del nostro spazio.

Ora, vi sono tre specie di variazioni della curvatura, che si devono considerare come possibili:

1.° Il nostro spazio possiede forse effettivamente una

punto. Ora, queste due operazioni differiscono essenzialmente l'una dall'altra per ciò, che la lunghezza di un filo teso sulla superficie fra due punti qualunque di essa, e l'angolo formato da due fili, tesi parimente sulla superficie, e passanti per un punto, in modo da comprenderne una parte, non varieranno per la flessione, mentre varieranno invece per effetto della trazione. In conseguenza di ciò, supposto che una superficie possieda la proprietà, che un pezzo qualunque di essa si possa levare, e adagiarvelo in un altro posto qualsivoglia, senza che occorra stirarlo (o variarne la trazione), un essere, che appartenga a questa superficie, farà il postulato che un pezzo qualunque del proprio spazio si può trasportare in seno ad esso, senza che ne varii per questo la grandezza e la forma: il quale è il primo dei nostri postulati fondamentali sullo spazio (pagina 55). È chiaro che questa proprietà apparterrà a tutte le superficie, che si possono ottenere piegando in un certo modo una superficie sferica, o il piano, come la superficie d'un cilindro, o d'un cono. Ma appartiene anche ad un'altra classe di superficie, che si distinguono dalle precedenti perchè il piano tangente (come nel pa-

certa curvatura, diversa da punto a punto, che noi non sappiamo apprezzare, perchè troppo limitata è la regione dello spazio da noi conosciuto, o perchè confondiamo quelle piccole variazioni con alterazioni delle nostre condizioni fisiche, che non colleghiamo coi nostri spostamenti. Un essere, che potesse riconoscere quella curvatura variabile, dovrebbe avere il concetto della posizione assoluta di un punto; e per esso il postulato che la posizione è relativa perderebbe ogni significato. Perciò non sembra tanto difficile di concepire una mente capace del concetto di posizione assoluta, come ci lascierebbe credere Clerk-Maxwell; tale sarebbe la mente di un essere che sapesse distinguere quei cambiamenti così detti fisici, che sono effettivamente geometrici, e cioè dovuti ad uno spostamento nello spazio.

2.° Forse il nostro spazio è realmente uniforme (di curvatura costante), ma la grandezza della sua curvatura,

raboloide iperbolico) sega la superficie nel punto in cui la tocca: e la geometria di queste superficie, chiamate pseudosferiche, è quella che diventa la geometria del piano, quando al nostro secondo postulato sullo spazio si sostituisce il postulato più generale che lo spazio è infinito (vedi le note a pag. 85 e 88): insigne teorema di Beltrami.

Il primo postulato fondamentale stabilisce un'analogia fra queste classi di superficie (che, secondo la definizione geometrica della curvatura, si chiamano a curvatura costante) e il nostro spazio a tre dimensioni. E se s'immagina ch'esso possieda una curvatura analoga a quella delle superficie pseudosferiche, dei piani, e, in un piano, delle rette, che, per quanto si prolunghino, non s'incontrano, avranno nello spazio medesimo una reale esistenza; ma fissato un piano, e, in un piano, una retta, non vi sarà *un solo* piano, e *una sola* retta del piano, che, per quanto si prolunghi, non l'incontra, come avviene nello spazio omaloidale (cfr. l'ultima nota citata).

Nota del Traduttore.

pur mantenendosi sempre eguale in tutti i punti, va continuamente cambiando. In questo caso la nostra geometria, fondata sull'ipotesi dell'uniformità, si applicherebbe sempre a qualunque regione dello spazio; ma il cambiamento continuo della curvatura produrrebbe una successione di apparenti fenomeni fisici.

3.° Finalmente si può immaginare che il nostro spazio abbia dappertutto una curvatura quasi uniforme, la quale varii da punto, e, nei singoli punti, col decorrere del tempo. Le variazioni nel tempo produrrebbero effetti, che noi abbastanza naturalmente attribuiremmo a cause fisiche indipendenti dalla geometria dello spazio. Anzi, possiamo forse spingerci fino a supporre che si fatta variazione della curvatura dello spazio fosse per avventura « ciò che realmente succede in quel fenomeno, che noi chiamiamo il moto della materia » (*).

Queste considerazioni sulla natura dello spazio sono specialmente destinate a fornire al lettore una giusta idea

(*) Sembra che Clifford sia stato il primo che enunciò questa notevole *possibilità* (*Mathematical Papers*, pag. 21). Aggiungerò le seguenti osservazioni: Le principali quantità fisiche, che variano colla posizione e col tempo sono il calore, la luce e l'elettromagnetismo. Sono queste quantità, che si dovrebbero considerare in special modo, quando si trattasse d'indagare quali cambiamenti fisici potrebbero provenire da cambiamenti della curvatura dello spazio. Supposto che il limite di un corpo qualunque fosse deformato, per effetto di un'alterazione della curvatura dello spazio, analogamente al caso di una e di due dimensioni, non varierebbe per questo il volume del corpo. Inoltre, *ammesso* come assioma che lo spazio reagisca all'incurvazione con una forza proporzionale all'alterazione prodotta, si trovano onde di « spostamento di spazio » affatto simili a quelle del mezzo elastico, che ordinariamente si suppone trasmettere la luce e il calore; come pure si

del carattere dei postulati, che noi poniamo per base delle scienze esatte. Questi postulati *non* sono, come troppo spesso si crede, verità necessarie ed universali; essi non sono che assiomi, fondati sull'esperienza di una certa regione limitata di spazio. Nel modo stesso che, per fabbricare la teoria di un ramo di fisica, partiamo dall'esperienza, e fondiamo sui nostri esperimenti un certo numero di assiomi, che ne formano in tal modo la base, così gli assiomi, che prendiamo per fondamento della geometria, per quanto meno palesemente, sono realmente un risultato dell'esperienza. Il pericolo a cui ci esponiamo, asserendo dogmaticamente che un assioma, dedotto dall'esperienza di una regione limitata di spazio, sia universalmente vero, è oramai abbastanza evidente. Questa credenza potrebbe sottrarci una possibile interpretazione dei fenomeni fisici, o indurci a respingerla, tosto che ci si presentasse alla mente. Difatti, qualunque possa essere la parte, che, nella fisica dell'avvenire, sono destinate a sostenere le ipotesi che lo spazio non sia omaloidale, e che la sua natura geometrica varii col decorrere del tempo, non si può sicuramente rifiutarsi dal considerarle come spiegazioni possibili dei fenomeni fisici, pel fatto che sono in opposizione colla credenza volgare che certi assiomi geometrici siano universalmente veri, credenza nata da secoli di culto cieco del genio di Euclide.

presenta « una rotazione elementare di spazio », che corrisponde esattamente all'induzione magnetica, e soddisfa a condizioni simili a quelle che sussistono pel campo magnetico. Resta da decidere, se ai fisici non tornerebbe più semplice ammettere che lo spazio sia suscettibile di una curvatura variabile, e di una resistenza alla variazione medesima, piuttosto che supporre l'esistenza di un mezzo sottile, che riempie uno spazio omaloidale invariabile.

CAPITOLO V.

MOVIMENTO

—

§ 1. *Sulle varie specie di movimento.*

Mentre i capitoli sullo Spazio e sulla Posizione avevano per oggetto le grandezze, le forme e le distanze delle cose, il presente capitolo, dedicato al Movimento, tratterà delle variazioni, che, nelle grandezze, nelle forme e nelle distanze, avvengono col decorrere del tempo.

Che cosa s'intenda nelle scienze esatte per « variazione », in confronto di ciò che s'intende nel linguaggio famigliare, apparirà dall'argomento di questo capitolo forse meglio che da ogn'altro.

Noi abbiamo potuto raggiungere il risultato di esprimere esattamente la quantità e la posizione, col rappresentarle per mezzo di rette, invece che per mezzo di numeri: per quanto sembri, a prima vista, che quel metodo ci faccia fare un passo indietro, piuttosto che portarci avanti, ritraendo del segno d'aprir le braccia, che fa il bambino, per mostrare che il suo bastone è tanto lungo, più che di un processo di calcolo scientifico.

Ma non è altrettanto facile descrivere esattamente un

movimento, sebbene questo concetto non sia per sè stesso meno comune e famigliare di quello di quantità e di posizione.

Per prendere un caso abbastanza semplice, supponiamo che una persona, viaggiando in ferrovia, sieda all'estremità di un compartimento, colla faccia rivolta alla macchina: e che, ad un certo punto, mentre il convoglio procede per la sua via, si alzi, passi all'altra estremità, e si metta a sedere in modo da andare all'indietro. Per spiegare l'atto di quella persona, avremo detto anche troppo; ma, in tal modo, si è ben lungi dal descriverne esattamente il movimento, durante quel tempo. A tal fine, poichè il convoglio si move, bisognerà indicare, in primo luogo, qual fosse la sua direzione, e la velocità del suo movimento, ad ogni istante dell'intervallo considerato. Ciò fatto, resterà da descrivere il moto della persona per rispetto al convoglio: al quale scopo si dovrà far astrazione del movimento di esso, e indagare come si moverebbe la persona nel compartimento supposto fermo. Ora essa cambia, in primo luogo, di posizione, passando da un canto al canto opposto; poi, durante questo spostamento, gira intorno a sè stessa; finalmente, nell'atto che si alza da sedere, che cammina, e che si mette a sedere di nuovo, molti de' suoi muscoli cambiano di grandezza e di forma. Quindi, bisognerebbe saper dire esattamente, prima, in qual direzione, e con quale velocità si movesse ad ogni istante, come nel caso del convoglio: poi, con quale velocità girasse intorno a sè stessa: e finalmente quali fossero i cambiamenti di grandezza e di forma dei muscoli, e con quale velocità si compissero.

Si osserverà immediatamente che questa sarebbe una operazione assai scabrosa, e che non occorrerà mai di descrivere il movimento di una persona con tanta minutezza. Ciò è verissimo; il caso, che abbiamo addotto come esempio, non è di quelli che occorre descrivere minutamente; ma ne troveremo facilmente un altro, affatto analogo, la cui precisa descrizione avrebbe la massima importanza. La terra gira intorno al sole, compiendo una rivoluzione all'anno; al tempo stesso, gira intorno al proprio asse, compiendo una rotazione al giorno; e, mentre partecipano a questi movimenti, le parti scorrevoli di essa, l'atmosfera e l'oceano, subiscono continui cambiamenti di forma e di stato, che molti fenomeni ci rendono palesi: e lo stesso nucleo solido va soggetto a piccole alterazioni di forma e di grandezza, le quali però non sono abbastanza sensibili da prestarsi ad un'osservazione accurata. Ognun vede quanto sarebbe importante che le vicende dell'atmosfera e del mare si sapessero calcolare e predire; e perciò, ecco un problema, non meno complicato del precedente, la cui rigorosa soluzione presenta il maggior interesse.

Il metodo a cui si ricorre, per attaccare il problema in discorso della descrizione precisa del movimento, consiste nel cominciare dai casi più semplici; e cioè dai casi, dove non si presentano certe circostanze, che complicano particolarmente le questione. Prima di tutto, giova limitarsi allo studio dei moti di quei corpi, nei quali non avvengono cambiamenti di grandezza e di forma. Un corpo, che, nell'intervallo di tempo considerato, conserva inalterata la grandezza e la forma, si dice *rigido*. Il vocabolo « rigido » si adopera qui in un senso tecnico, proprio della

dinamica; e non significa che il corpo resista ad ogni azione, che tenda a modificarne la forma e la grandezza, come nel linguaggio ordinario: ma solo che, durante un certo intervallo di tempo, non presenta alterazioni di questa specie. Ciò posto, il primo e più semplice caso è quel moto di un corpo rigido, per effetto del quale il corpo non gira: donde segue che ogni retta in esso tracciata, durante il moto, cambia di posto, ma conserva sempre la medesima direzione. Ciò si esprime, dicendo che ogni retta « rigidamente riunita » col corpo si mantiene parallela a sè stessa. Un movimento così definito si chiama un *movimento di traslazione*, o anche semplicemente una *traslazione;* e perciò il primo e più semplice caso, che ci converrà studiare, è la traslazione dei corpi rigidi. In seguito, si passerà a considerare quel moto degli stessi corpi, pel quale essi girano intorno a sè stessi, cioè la *rotazione;* ed esaminato anche questo movimento, resteranno da descrivere i cambiamenti di grandezza e di forma, che generalmente un corpo potrà presentare, i quali si comprendono sotto il nome di *dilatazioni.* Apparisce da ciò come lo studio del movimento richieda una completa indagine delle traslazioni, delle rotazioni e delle dilatazioni; alla quale si dovrà far seguire quella del modo di comporle insieme. Esaurite queste indagini, noi saremo finalmente in grado di dare una precisa descrizione dei movimenti; e allora, ma non prima, potremo determinare con perfetta esattezza le condizioni, nelle quali si compie un movimento di data specie: ciò che noi chiamiamo una *legge di natura.*

§ 2. *Traslazione e curva delle posizioni.*

Consideriamo, in primo luogo, la traslazione di un corpo rigido.

Perciò, immaginiamo che una tavola sia trasportata dall'ultimo piano al pian terreno di una casa, in modo che la sua superficie si mantenga sempre orizzontale, e che la sua lunghezza sia sempre rivolta da nord a sud; non facciamo alcuna restrizione sulla forma della scala; supponiamo soltanto che la tavola non sia mai nè inclinata, nè girata intorno a sè stessa. La tavola, in questo caso, riceverà una traslazione. Ora è chiaro che, se si considera uno dei quattro canti, o l'estremità di una gamba, o qualsiasi altro punto, questo punto descriverà una certa curva, in un modo determinato: ciò che significa che, ad ogni punto della curva, si sposterà con una determinata velocità. Ciò posto, il moto di traslazione presenta la proprietà importante, per la quale riesce più facile di trattarlo che qualunque altro, che questa curva, per tutti i punti del corpo, ha la stessa grandezza e la stessa forma, ed è egualmente descritta. Che ciò avvenga, nel caso della tavola, segue immediatamente dalla supposizione ch'essa non venga mai nè inclinata, nè girata intorno a sè stessa: donde apparisce che tutti i suoi punti dovranno spostarsi, ad ogni istante, nella stessa direzione e colla stessa velocità. Quindi, per descrivere il movimento in discorso, basterà descrivere quello di un punto particolare, come sarebbe l'estremità di una gamba; ed, in generale, il problema di descrivere il moto di traslazione di un corpo rigido qualunque, si ridurrà a quello di descrivere il moto di un punto lungo una curva.

Ora questo è un còmpito ben più facile di quello che fosse il nostro primitivo problema di descrivere il moto della terra, o quella della persona nel convoglio ferroviario; ma vedremo, che, studiato convenientemente questo caso, ci tornerà facile di ricavarne altri più complicati. Se non che, anche ridotto a questi termini, il nostro problema non è ancora abbastanza semplice, per poter essere direttamente attaccato. Ciò che noi dobbiamo fare, rammentiamolo, è determinare esattamente il posto occupato da un certo punto, e la velocità del suo spostamento, ad ogni istante, durante un certo intervallo di tempo. Perciò, noi dovremo determinare, in primo luogo, la forma della curva lungo la quale il punto si move; quindi, indicare il cammino percorso dal punto dal principio del moto fino ad ogni dato istante; e finalmente, la velocità da esso posseduta, all'istante medesimo. Per trattare questo problema, giova cominciare dal caso più semplice, nel quale il punto descrive una retta, e lasciare, per un momento, da parte ogni determinazione di velocità; ciò che riduce il problema a indicare la posizione occupata dal punto, sopra una certa linea retta, ad ogni dato istante, durante un determinato intervallo di tempo.

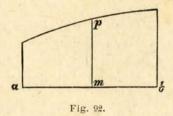
Ora, si è veduto a suo luogo qual sia il miglior modo di definire la posizione di un punto sopra una retta. Esso consiste nel definirla per mezzo del passo, che conduce il punto alla posizione medesima, da un posto fisso; il quale sarà un passo di certa grandezza, spiccato da quel posto, e diretto, a seconda del caso, verso destra o verso sinistra. Per indicare la lunghezza del passo, se vogliamo farlo esattamente, non dobbiamo valerci di vocaboli o di numeri, ma descrivere una retta, che rappresenti la lun-

ghezza corrispondente ad ogni istante, durante l'intervallo di tempo considerato, per modo che la domanda: dov'era il punto in quell'istante? trovi sempre la sua risposta. Ma una domanda, perchè si possa esattamente rispondervi, dev'essere anzitutto fatta esattamente; e perciò, nel caso nostro, bisognerà prima indicare in modo preciso l'istante a cui la domanda si riferisce.

Ora il tempo, come la lunghezza, è una quantità continua, che in generale non si può definire a parole, o per mezzo di numeri, ma bensì descrivendo una retta, che la rappresenti in una certa scala. Ciò premesso, supponiamo che l'intervallo di tempo, durante il quale si tratta di determinare il movimento di un punto, sia quello che decorre da mezzogiorno al tocco. In tal caso, segneremo sopra una retta un punto che rappresenti mezzogiorno, ed un altro che rappresenti il tocco; allora ogni istante compreso fra mezzogiorno ed il tocco si troverà rappresentato dal punto, che divide la distanza dei due punti così segnati nello stesso rapporto, in cui l'istante medesimo divide l'intervallo compreso fra mezzogiorno e il tocco. Ciò posto, ad ognuno di questi punti dobbiamo assegnare una certa lunghezza, la quale rappresenti (in una scala opportunamente fissata) lo spazio percorso dal mobile fino all'istante corrispondente; e resta da decidere in qual modo segneremo questi spazii.

Riflettiamo innanzi tutto sulle difficoltà, che presenta il quesito che ci siamo proposti. Se ci bastasse una soluzione approssimata, potremmo costruire una tavola, ed esprimere gli spazii percorsi dal punto mobile in centimetri e frazioni decimali di centimetro, registrando un valore per ogni minuto, oppure per ogni secondo, dell'intervallo considerato

di un'ora. Le tavole annesse alle Effemeridi Astronomiche, che, sotto diversi nomi, si pubblicano dai grandi Osservatorii, le quali forniscono la posizione della luna e dei pianeti, ad ogni epoca dell'anno, sono costruite secondo questo principio. Il calcolo di una tavola siffatta richiederà un lavoro più o meno grande, a seconda della minutezza prescritta; così, è chiaro che, per costruire una tavola, che indichi la posizione del punto ad ogni secondo, bisognerà impiegare un tempo sessanta volte più lungo di quello che occorrerà, per costruirne una che la indichi soltanto di minuto in minuto, perchè vi sarà da calcolare un numero di valori sessanta volte maggiore. Ma, per fornire esattamente il moto del punto, la tavola dovrà indicare la posizione del punto ad ogni istante; e perciò contenere un numero infinito di valori. Di più, questi valori dovranno esser rappresentati, non già da numeri, ma da lunghezze. Orbene, questo metodo figurativo di costruire una tavola è, nella massima parte dei casi, assai più semplice dell'altro.

Fig. 92.

Per tornare al caso considerato, le rette, che rappresentano gli spazii percorsi dal punto, dal principio del movimento ai singoli istanti, si segneranno nel modo seguente.

Sia *ab* la lunghezza che rappresenta l'intervallo di tempo compreso fra mezzogiorno e il tocco, ed il punto *m* indichi un istante intermedio qualunque. Allora, se da *m* s'innalzerà una retta perpendicolare ad *ab*, la cui lunghezza rappresenti (in una scala presa ad arbitrio) lo spazio percorso dal punto mobile fino a quell'istante, l'estremità *p* di questa retta corrisponderà al valore *am* del tempo, col quale si entra nella tavola. Ora, se, allo stesso modo, s'immagina innalzata una retta perpendicolare da ogni punto di *ab*, tutti i punti *p*, che segnano l'estremità delle singole rette, giaceranno sopra una certa curva; e questa curva rappresenterà una infinità di valori della tavola, corrispondenti ad altrettante entrate. Difatti, una volta descritta questa curva, se si domanderà: qual'era la posizione occupata dal punto ad un istante qualsiasi compreso fra mezzogiorno ed il tocco? (indicando questo istante nel giusto modo, col segnare fra *a* e *b* un punto, il quale divida la retta *ab* nello stesso rapporto in cui l'istante dato divide l'intervallo di un'ora), per ottenere la risposta, basterà innalzare dal punto così segnato la perpendicolare ad *ab*, e prolungarla finchè incontra la curva; la lunghezza di questa retta rappresenterà, nella scala convenuta, lo spazio percorso dal punto.

La curva così costruita si chiama la *curva delle posizioni* del movimento considerato; e perciò arriviamo al risultato che la determinazione precisa di una traslazione lungo una retta si otterrà descrivendo la curva delle posizioni.

Così, abbiamo imparato a determinare, per mezzo di una curva, le posizioni occupate da un corpo che possiede un moto di traslazione secondo una retta; e, a quel modo, non solo rappresentiamo un numero infinito di posi-

zioni, mentre ogni tavola numerica non ne comporterebbe che un numero finito, ma indichiamo altresì ogni posizione con precisione assoluta, invece che per approssimazione. Giova notare però che in questo, come in ogni altro caso simile, la precisione è puramente ideale; è precisione di concetto, non di effettiva misura. Difatti, non si potrà ottenere la vera misura di una lunghezza, descrivendo la retta che la rappresenta, più che esprimendola in centimetri e frazioni di centimetro: ma si potrà ragionare sul disegno come se fosse esatto, mentre, in generale, l'espressione numerica sarà essenzialmente approssimata.

§ 3. *Moto uniforme.*

Finora abbiamo supposto che il punto considerato si movesse lungo una retta; se invece descriverà una curva, la costruzione precedentemente spiegata della curva delle posizioni si applicherà egualmente anche a questo caso, colla sola differenza che lo spazio percorso fino ad un istante qualsivoglia dovrà essere misurato, partendo da una certa posizione fissa, *lungo la curva.* Segue da ciò che qualunque movimento di un punto, ossia qualunque moto di traslazione, si potrà definire, per mezzo di una curva delle posizioni debitamente tracciata; e per conseguenza, la classificazione e il confronto di quei movimenti si riduce ad una classificazione e ad un confronto di curve. Qui pure torna opportuno, e, possiam dire, è necessario, di cominciare da un caso semplice. Perciò, prendiamo il caso del moto uniforme, nel quale il corpo percorre spazii eguali in tempi eguali, per modo che, come facilmente si vedrà, la curva delle posizioni di-

venta una retta. Il moto uniforme si definisce anche come quello, nel quale un corpo si move sempre colla stessa velocità, e non ora più presto, ed ora meno. È ovvio che, in questo caso, due spazii eguali, qualunque siano, saranno percorsi in tempi eguali; e perciò queste due definizioni del moto uniforme sono equivalenti.

Fu dimostrato da Archimede (la dimostrazione, fondata sulla definizione di quarta proporzionale, è semplicissima) che, se spazii eguali sono percorsi in tempi eguali, spazii diversi saranno percorsi in tempi ad essi proporzionali. Ammessa questa proposizione, riesce evidente che, nel caso in discorso, la curva delle posizioni deve ridursi ad una retta; poichè, la retta è la sola linea, nella quale si verifica la proprietà che l'altezza di ogni punto è proporzionale alla sua distanza orizzontale da una retta fissa.

La relazione che passa fra la linea retta e il moto uniforme, si vedrà anche nel seguente modo.

Immaginiamo di salire sopra un colle, e di avanzarci, in direzione orizzontale, di quattro chilometri all'ora. In direzione verticale, c'innalzeremo con una velocità, che dipenderà evidentemente dalla pendenza; che, se il declivio sarà piano, vale a dire avrà dappertutto la stessa pendenza, questa velocità sarà anche ad ogni istante la stessa, e il nostro moto verticale, uniforme. In questo caso, se il colle, con quattro chilometri di base, ne avrà uno d'altezza, siccome per ipotesi, la base sarà percorsa in un'ora, sarà egualmente percorso in un'ora il chilometro d'altezza: e noi ci porteremo verticalmente in alto colla velocità costante di un chilometro all'ora. Parimente, se il colle avrà due chilometri d'altezza, e sarà quindi erto il doppio di prima, c'innalzeremo, in direzione ver-

ticale colla velocità costante di due chilometri all'ora. Se invece il colle avrà una pendenza variabile da punto a punto, per modo che, veduto di fianco, si disegnerà secondo una curva, è chiaro che, mantenendo l'ipotesi che ci avanziamo in direzione orizzontale con velocità costante, la velocità, colla quale ci porteremo verticalmente in alto, sarà diversa a seconda del posto. In ogni caso, il « profilo » del colle si potrà considerare come la curva delle posizioni corrispondente al nostro moto verticale. Poichè lo spazio guadagnato in direzione orizzontale, essendo sempre proporzionale al tempo, si potrà prendere, per rappresentare il tempo; e perciò la linea, che segna il profilo del colle, risulterà descritta secondo la regola a suo luogo indicata, per descrivere la curva delle posizioni di un movimento: cioè, prendendo una retta orizzontale proporzionale al tempo decorso, e, dal termine di essa, innalzando una perpendicolare indicante l'altezza raggiunta nel tempo stesso. Concludiamo che, nel caso del moto uniforme, la curva delle posizioni si riduce ad una retta, dalla cui pendenza dipende la velocità del movimento; mentre, nel caso di un moto vario, essa è una curva, e la velocità del movimento dipende, ad ogni istante, dalla sua pendenza, diversa da punto a punto.

Nel caso del moto uniforme, è ovvio il significato della velocità del mobile. Così, se una persona cammina uniformemente colla velocità di sei chilometri all'ora, s'intende che percorre sei chilometri in un'ora, un chilometro ogni dieci minuti, la decima parte di un chilometro al minuto, e così via, in proporzione. Ma potrà anche darsi che la velocità, con cui una persona cammina, non si possa esprimere per mezzo di numeri; cioè che la persona non

percorra un numero determinato di chilometri all'ora, e che il cammino da essa percorso in questo tempo non si possa esprimere esattamente per mezzo di chilometri e di frazioni di chilometro. In questo caso, rappresenteremo la velocità del movimento come le altre quantità continue; traccieremo sopra un foglio, in una certa scala, una retta, la quale rappresenti la lunghezza percorsa dalla persona all'ora, o al minuto, o in un altro intervallo di tempo qualsiasi, a nostra scelta; così, per esempio, la velocità con cui marcia un reggimento si potrà indicare, segnando i punti corrispondenti a due ore determinate sopra una carta d'ordinanza. La velocità, misurata dal rapporto dello spazio percorso dal mobile in un tempo qualsivoglia, a questo tempo, è quindi una quantità continua, che si può rappresentare esattamente, nel modo stesso che le altre quantità continue, mentre, per mezzo di numeri, non si potrà esprimere che per approssimazione.

§ 4. *Moto vario.*

Ora supponiamo che il moto non sia uniforme, e vediamo che cosa si debba intendere, in questo caso, per velocità colla quale un corpo si move.

Un convoglio, ad esempio, parte da una stazione, e, in pochi minuti acquista la velocità di 30 chilometri all'ora. In principio era fermo: e finisce per avere questa ragguardevole velocità; per quali condizioni è passato nel frattempo? All'ingrosso si capisce che cosa significa che ad un certo istante, compreso fra il principio e la fine, esso deve aver avuto la velocità di 15 chilometri all'ora, o qualche altra velocità intermedia; ma procuriamo di

rendere questo concetto alquanto più preciso. Perciò, supponiamo che un secondo convoglio, di lunghezza indefinita, si mova colla velocità costante di 15 chilometri all'ora, sopra un pajo di guide parallele a quelle del primo; allora, finchè questo convoglio sarà fermo, si vedrà il secondo passargli avanti con quella velocità. Quando il primo convoglio comincerà a muoversi, parrà, ad un osservatore posto in esso, che il secondo si mova alquanto più lentamente; sebbene lo vedrà sempre andare avanti. Il moto del secondo convoglio parrà rallentarsi sempre più, mentre la velocità del primo andrà crescendo: finchè sembrerà così lento che si potrà tener conversazione fra un convoglio e l'altro. A questo punto, il primo avrà prossimamente, ma non esattamente, la velocità di 15 chilometri all'ora, che è la velocità costante colla quale abbiamo supposto che cammini il secondo. Ma, la velocità del primo convoglio continuando a crescere, arriverà un certo momento nel quale il secondo parrà cessare dal guadagnar terreno sul primo, e cominciare a perderne. In quell'istante particolare, esso nè guadagnerà nè perderà, ma avrà la stessa velocità dell'altro; e perciò, nell'istante medesimo, diremo che il primo convoglio possiede la velocità di 15 chilometri all'ora. Notiamo che ciò non si verificherà che in quell'istante: perchè i due convogli non possederanno la stessa velocità, per qualsiasi frazione di secondo, per piccola che sia; nell'istante stesso che il secondo sembrerà cessare dal guadagnar terreno, sembrerà pure che cominci a perderne. Perciò i due convogli non andranno esattamente di pari passo per qualsiasi tratto: nemmeno per la più piccola frazione di millimetro. Ciò non toglie che noi dobbiamo dire che ad un

determinato istante il nostro primo convoglio possiede la velocità di 15 chilometri all'ora: non facendo ostacolo che esso non continui a muoversi colla velocità medesima per il più piccolo intervallo di tempo. Questa velocità istantanea non si potrà misurare altrimenti che nel modo ora spiegato, consistente nel confrontare il movimento considerato con un moto uniforme, dove la velocità abbia quel valore speciale.

Si ricava da ciò l'osservazione importantissima che la velocità colla quale si move un corpo, è una proprietà puramente istantanea, come la posizione da esso occupata nell'istante medesimo. Così, se si lascia cadere a terra una pietra, nel momento ch'essa urta contro il suolo, avrà una certa velocità perfettamente determinata; ma, poichè non la mantiene per la più piccola frazione di secondo, colla stessa velocità non si moverà in alcun istante precedente. Questo concetto presenta una certa difficoltà ad essere perfettamente afferrato: e da ciò molti furono tratti a respingere senz'altro l'ipotesi della continuità; ma noi ci serviremo con profitto, anche per chiarire questo concetto, dello studio della curva delle posizioni, donde abbiamo ricavato che un moto uniforme corrisponde ad una linea retta, e che la velocità del moto è subordinata alla pendenza della retta stessa.

Immaginiamo un movimento, nel quale un corpo si mova di moto uniforme assai lento, nel primo secondo di tempo: sempre uniformemente, ma alquanto più velocemente, nel secondo successivo: più velocemente ancora nel terzo, e così va dicendo. La curva delle posizioni sarà rappresentata, in questo caso, da una serie di rette di pendenza sempre crescente, formanti una spezzata. Ve-

duta da un punto abbastanza lontano, questa spezzata apparirà come una curva; che, se, invece di prendere gli intervalli di tempo, durante i quali la velocità del corpo si considera come costante, eguali ad un secondo, si prenderanno eguali ad un decimo di secondo, la spezzata presenterà l'aspetto di una curva, senza che occorra di andare tanto lontano come prima. Difatti, la spezzata somiglierà tanto più ad una curva, quanto più saranno brevi i suoi lati; e, se gl'intervalli di tempo in discorso si ridurranno ad un decimo, anche i lati si ridurranno nella stessa misura. La velocità colla quale si move il corpo considerato, quando occupa una posizione corrispondente ad un punto qualsiasi della spezzata, si otterrà, prolungando il lato che passa per quel punto; e dipenderà dalla pendenza della retta così descritta: poichè questa retta, dove forma il lato della spezzata, rappresenta il moto uniforme che il corpo possiede durante l'intervallo corrispondente. Quando la spezzata apparisce come una curva, i lati saranno brevissimi; ed ognuno di essi, prolungato in entrambi i sensi, si confonderà con una tangente alla curva.

Ora, quando si considera il caso generale del moto vario, invece della precedente spezzata, che apparisce come una curva, si ha una vera curva, differente da una spezzata curviforme perciò, che, osservando questa con un microscopio abbastanza potente, si riuscirà sempre a distinguerne gli angoli, mentre la curva, qualunque sia l'ingrandimento del microscopio, presenterà sempre il medesimo aspetto. Ma, nel modo stesso che l'inclinazione del latercolo prolungato indica la velocità del movimento rappresentato dalla spezzata, se si descriverà la tangente alla curva in un punto qualunque, l'inclinazione di questa retta,

siccome sarà perfettamente eguale a quella della curva, in quel punto particolare, indicherà la velocità del movimento rappresentato dalla curva medesima. In altre parole, la velocità istantanea, che possiede un corpo, in ogni posizione, si potrà ricavare dalla relativa curva delle posizioni, descrivendo la tangente a questa curva, nel punto che corrisponde alla posizione considerata. Questa retta rappresenterà un moto uniforme, di velocità eguale a quella che appartiene al moto vario in discorso, in quell'istante speciale: e perciò la sua pendenza fornirà la velocità richiesta. Questa rappresentazione mette in evidenza come un corpo che si move di moto vario, non possederà una determinata velocità che per un istante, e non la conserverà per un intervallo di tempo qualsiasi, per breve che sia; infatti l'inclinazione di una curva cambia continuamente da punto a punto: ossia la curva non coincide con una retta per alcun tratto, di qualsivoglia piccolezza.

Così, il problema di determinare la velocità istantanea in una data posizione si riduce a quello di descrivere la tangente ad una curva. Noi abbiamo dell'una e dell'altra cosa un'idea generale abbastanza chiara; ma quell'idea, sufficiente per intenderci alla buona, non è abbastanza precisa, per prenderla a base di un ragionamento. Per rendere precisa la nostra idea di velocità, noi dobbiamo procurare di definirla per mezzo di quantità misurabili, di cui si sia ben fissato il senso: nel modo stesso che, per rendere preciso il concetto di rapporto di due quantità, abbiamo definito la quarta proporzionale, e ridotto il confronto di due rapporti a quello dei rapporti numerici maggiori e minori di essi.

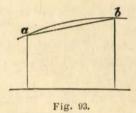
La velocità istantanea di un mobile non si può diretta-

mente misurare. Noi possiamo misurare soltanto uno spazio percorso dal mobile in un intervallo di tempo di certa durata. Ora, la conoscenza dello spazio percorso in un certo tempo basta per determinare completamente la velocità del mobile, nel caso che il movimento sia uniforme, nel quale la velocità in discorso è sempre la stessa ad ogni istante; e, come abbiamo precedentemente osservato, il risultato è lo stesso, qualunque sia il tempo considerato: la velocità di quattro chilometri all'ora, è la stessa che quella di due chilometri alla mezz'ora, la stessa che quella di un chilometro al quarto d'ora. Ma, se il corpo si move con velocità che varia continuamente, quando conosciamo lo spazio percorso in un certo intervallo di tempo, non sappiamo ancora nulla intorno alla velocità istantanea, da esso posseduta in ogni posizione, durante l'intervallo medesimo. Dicendo, per esempio, che una persona ha percorso in un'ora un tratto di quattro chilometri, non si dà alcuna indicazione sulla velocità colla quale essa camminava ad ogni istante, durante l'ora: a meno che non si sappia che camminava con velocità costante. Se non che si suol dire che, in tal caso, la persona avrà camminato, *in media*, colla velocità di quattro chilometri all'ora; e giova introdurre il concetto generale di « velocità media » colla definizione seguente:

Quando un corpo percorre, in un certo tempo, un determinato spazio, la sua *velocità media* è quella con cui percorrerebbe lo stesso spazio nel medesimo tempo, se si movesse di moto uniforme.

La velocità media così definita si rappresenta assai facilmente, per mezzo della curva delle posizioni. Se a e b sono due punti di questa curva, la velocità media corri-

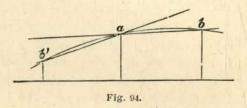
spondente al tratto compreso fra le posizioni rispettivamente rappresentate da a e da b è indicata dalla pendenza della retta ab. Ciò ne mette sulla via per trovare un metodo di calcolare la velocità istantanea. Difatti, abbiamo dimostrato che, valendosi della rappresentazione grafica precedentemente spiegata, la determinazione della velocità istantanea di un corpo si riduce a quella della tangente ad una curva. Ora, la velocità media è definita per mezzo di quantità che noi abbiamo imparato a misurare: poichè richiede la misura di un intervallo di tempo, e della distanza percorsa dal corpo in quell' intervallo. D' altra parte la *corda* di una curva, cioè la retta che congiunge

Fig. 93.

un punto di essa con un altro, sappiamo tracciarla. E, per quanto precede, quando si riesca a trovare il modo di passare dalla corda alla tangente, la nostra rappresentazione ci permetterà di passare dalla velocità media alla velocità istantanea.

§ 5. *Sulla tangente ad una curva.*

Supponiamo che la corda ab, che congiunge i punti a e b della curva considerata, ruoti intorno al punto a, che supponiamo rimanga fisso; b scorrerà lungo la curva,

verso *a*; e, supposto che non si fermi, finchè non oltrepassi *a*, e raggiunga il punto *b'*, posto dall'altra parte di *a*, la corda, girando, finirà per prendere la posizione *ab'*. Dall'annessa figura apparisce chiaramente che la tangente alla curva nel punto *a* cadrà fra *ab* e *ab'*; per modo che

Fig. 94.

ab, mentre ruota intorno ad *a*, per ridursi nella posizione *ab'*, ad un certo momento, deve prendere la posizione della tangente. Dove si troverà, in quel momento, il punto *b*? Si vede immediatamente ch'esso non potrà trovarsi che in *a*. Ciò malgrado, noi non possiamo annettere alcun senso determinato ad una retta definita come congiungente di due punti, che ne formano uno solo. Se ciò fosse possibile, la tangente sarebbe bell'e determinata; perchè basterebbe dire: Prendasi sulla curva un secondo punto *b*, si congiunga *a* con *b* mediante una retta, quindi si faccia camminare *b* lungo la curva verso *a*; e la posizione della retta *ab*, quando *b* abbia raggiunto *a*, sarà quella della tangente in *a*. Ma qui sorge la difficoltà che abbiamo testè indicato; e cioè che noi non possiamo farci alcuna precisa idea di una retta, che congiunge due punti coincidenti; per fissare una retta, occorrono due punti distinti. Tuttavia, quella definizione, per quanto insufficiente, ha un lato giusto, e la sua parte d'utilità; poichè è un fatto

che, facendo girare la corda dalla posizione *ab* a quella della tangente in *a*, il punto *b*, per effetto di questo movimento, scorrerà lungo la curva, e finirà per cadere in *a*.

La difficoltà fu risolta per la prima volta da Newton; e la sua risoluzione, fondata sopra considerazioni di puro senso comune, è del genere seguente: Supponiamo, per maggior semplicità, che la curva considerata sia un circolo. Allora, se s' immagina di prendere una verga e di piegarla in modo che diventi parte di un circolo, è chiaro che questo circolo sarà più o meno grande, a seconda dell'incurvazione della verga. Noi potremo piegarla finchè i due estremi si tocchino, e in questo caso avremo un circolo di piccole dimensioni; e potremo anche incurvarla appena sensibilmente, e allora rappresenterà parte di un circolo grandissimo. Reciprocamente, se s'immagina di prendere un piccolo cerchio, e d'ingrandirlo sempre più, un tratto della lunghezza della verga diventerà sempre meno incurvato; e perciò, se un cerchio cresce indefinitamente, ogni piccolo tratto di esso tende sempre più a diventare rettilineo. Segue da ciò che il cerchio possiede la proprietà di approssimarsi sempre più ad una retta, quanto più s'ingrandisce; e la stessa proprietà appartiene a tutte le curve, che occorre di considerare. Ciò si esprime dicendo che la curva è rettilinea ne' suoi elementi, o nelle sue parti infinitamente piccole; ma, intendasi bene, che questa proposizione significa puramente che un tratto di curva, quanto più piccolo si prende, tanto più sembra approssimarsi ad una retta, visto con un ingrandimento determinato.

Vediamo quale partito si può trarre da queste considerazioni, per determinare la posizione della tangente. Sia

at la tangente ad un circolo, che supporremo già descritta, e segniamo sopra di essa un tratto *a*T d'opportuna lunghezza; innalziamo da T la perpendicolare, e prolunghiamola finchè incontra il circolo, in B: e congiungiamo *a*

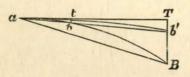
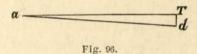



Fig. 95.

con B, mediante la retta *a*B. Noi dobbiamo considerare il movimento, che compie il punto B, lungo il circolo, mentre la corda *a*B gira intorno ad *a*, per portarsi nella posizione *a*T; e la difficoltà è evidentemente questa, che una figura, come sarebbe *a*BT, impiccolisce: si riduce, per esempio, ad *abt:* e seguita a diventare sempre più piccola, finchè per l'estrema piccolezza sfugge ad ogni possibile osservazione. Newton supera questo ostacolo, immaginando che la figura sia sempre ingrandita, per modo da raggiungere una certa grandezza; e, attenendoci a questo principio, invece di considerare la figura più piccola *abt*, noi l'ingrandiremo, finchè *at* riprenda la lunghezza primitiva *a*T. Ora, la parte *ab* di circolo, che attualmente si considera, è più breve della primitiva *a*B; e, per conseguenza, ingrandita in modo da presentare la stessa lunghezza (od una lunghezza prossimamente eguale), deve apparire meno incurvata. Quindi, nella nuova figura *ab'*T, che rappresenta *abt* veduta coll'ingrandimento in discorso, *b'* sarà più vicino a T di quello che fosse B nella figura

originaria aBT (*); e da ciò si conchiude che, mentre b si avvicina ad a, la corda ab si avvicina alla tangente aT: o, ciò che vale lo stesso, l'angolo tab diventa sempre più piccolo.

Quest'ultimo risultato parrà abbastanza naturale: poichè, come abbiamo precedentemente supposto, la corda ab va ruotando verso la posizione aT. Ma il fatto importante, ora acquisito, è che, prendendo b abbastanza vicino ad a, la curva, nella figura ingrandita, si potrà rendere prossima finchè si vuole ad una retta; ossia che b' si potrà ridurre vicino finchè si vuole a T. Se s'immagina di descrivere Td perpendicolare ad aT (fig. 96), per quanto

Fig. 96.

piccola sia la lunghezza di Td, si potrà sempre descrivere un cerchio, il quale abbia per tangente aT, e passi fra i due punti d e T; e descritta la retta ad, formante con aT un angolo piccolo ad arbitrio, si potrà sempre ridurre b così vicino ad a che, nella figura ingrandita, l'angolo $b'a$T risulti più piccolo dell'angolo daT così descritto.

Ora, vediamo qual'è la conclusione, che propriamente si ricava da questo ragionamento, al quale fu dato il nome di microscopio di Newton. L'artifizio consiste in ciò, che,

(*) Questa circostanza ammessa si considererà come la proprietà che definisce la tangente.

Nota del Traduttore.

mentre la figura, che si tratta di studiare, impiccolisce continuamente, finchè diventa invisibile, s'immagina che essa venga costantemente ingrandita, in modo da conservare un'opportuna grandezza. Ora, un punto scorre lungo una curva, verso un altro: e si vuol sapere che cosa succede della retta, che congiunge i due punti, quando essi si avvicinano indefinitamente l'uno all'altro. Il risultato a cui arriviamo, valendoci del nostro microscopio, è questo, che, prendendo i due punti abbastanza vicini, la retta in discorso si potrà rendere prossima finchè si vuole alla tangente alla curva nel punto a. Da ciò si deduce una definizione della tangente ad una curva, la quale non involge che quantità misurabili: Se ad un certo punto a di una curva vi è una retta at, la quale possiede la proprietà, che, prendendo b, sulla curva, abbastanza vicino ad a, la retta ab si può rendere prossima finchè si vuole ad at (vale a dire, l'angolo bat si può rendere (*) minore di qualsivoglia angolo assegnabile, piccolo finchè si vuole), la retta at sarà la tangente alla curva nel punto a. Notiamo che tutto ciò che in questa definizione si suppone di fare, noi sappiamo che si può fare realmente. Si potrà infatti fissare un angolo di qualunque piccolezza: e, fissato che sia, sappiamo come si troverà una posizione del punto b, tale che ab faccia con at un angolo minore di esso. Quindi, per determinare la tangente, secondo la precedente definizione, si tratta di eseguire operazioni che sappiamo eseguire, sopra quantità di cui abbiamo stabilito il significato. Noi facciamo poi la supposizione che la

(*) Intendasi rendere, e mantenere per ogni altra posizione di b più vicina ad a.

Nota del Traduttore.

posizione indicata del punto *b* si possa sempre trovare, per quanto piccolo si concepisca l'angolo fissato; che, se ciò è possibile, nel caso che l'angolo in discorso sia estremamente piccolo, la retta *ab*, o *at* (perchè allora le due rette coincideranno), sarà la tangente.

Val la pena di notare l'analogia, che presentano questa definizione e quella della quarta proporzionale, o dell'eguaglianza di due rapporti, di cui ci siamo occupati a suo luogo. Noi abbiamo supposto che, fissata una certa frazione, quando un rapporto fosse maggiore, o minore, di essa, lo fosse egualmente l'altro; e per decidere, se un rapporto è maggiore o minore di una frazione, non occorre che di prendere il rapporto medesimo, e fare il confronto. Abbiamo poi fatto la supposizione ulteriore che, qualunque frazione si fissasse, si verificherebbe quel risultato; e, in tal caso, abbiamo detto che i due rapporti sarebbero, per definizione, eguali. Orbene, ad entrambe queste definizioni, quella della tangente e quella dell'eguaglianza di due rapporti, si può muovere l'objezione che si applica a tutti i casi possibili un'ipotesi relativa a tanti casi particolari: ossia che un fatto, che facilmente si potrà constatare in ogni caso speciale, si ammette che si verifichi in infiniti casi, nei quali non si fa questa constatazione. Ma, se si verifica in ogni caso speciale, quantunque non si possa effettivamente constatarlo in tutti i casi possibili, sarà logico ammettere che si verifica in generale: e, giustificati da questa considerazione, ci sarà lecito di ragionare in generale sull'eguaglianza dei rapporti e sulle tangenti alle curve.

Ora traduciamo la definizione a cui siamo così pervenuti, dal linguaggio della geometria, in quello della dina-

mica. L'inclinazione di una corda della curva delle posizioni indica la velocità media, e quella della tangente alla curva stessa in un punto qualsiasi, la velocità istantanea corrispondente a quel punto. D'altra parte, ridurre il punto *b* sempre più vicino al punto *a* significa considerare un intervallo di tempo sempre più piccolo, partendo dall'istante, nel quale si tratta di determinare la velocità istantanea. Segue da ciò che, se un mobile, poniamo un convoglio ferroviario, si muove di moto vario, la velocità media relativa ad un'ora susseguente ad un determinato istante fornirà un valore appena approssimato, e talvolta assai lontano dal vero, della velocità istantanea del mobile in quell'istante. Ma un valore più approssimato sarà la velocità media relativa ad un minuto, susseguente all'istante medesimo. Un valore più approssimato ancora, la velocità media relativa al susseguente secondo. E, qualunque sia il movimento considerato, prendendo un intervallo di tempo abbastanza piccolo, si potrà raggiungere quell'approssimazione che si vuole: per esempio, rendere, la differenza fra la velocità media relativa a quell'intervallo, e la velocità istantanea richiesta, minore della velocità colla quale il mobile, di moto uniforme, percorrerebbe un centimetro in un secolo. Ciò posto, possiamo dare oramai della velocità istantanea la definizione seguente: Se vi è una certa velocità, alla quale la velocità media durante un intervallo di tempo susseguente ad un dato istante si può rendere prossima finchè si vuole, prendendo l'intervallo abbastanza piccolo, essa sarà la velocità istantanea del mobile nell'istante medesimo.

Così, la determinazione della velocità di un mobile in un istante qualsiasi è stata ridotta alla descrizione della

tangente alla curva delle posizioni relativa a quel moto, nel punto corrispondente; e si conclude che, se la posizione del mobile è data in termini del tempo per mezzo della curva delle posizioni, la velocità sarà data, egualmente in termini del tempo, per mezzo della tangente alla curva medesima.

Ora, vi sono parecchie linee, come, per esempio, l'ellisse e la parabola, alle quali si può descrivere la tangente con metodi puramente geometrici; e perciò, se la curva delle posizioni sarà per avventura una di esse, si potrà trovare la velocità del mobile ad ogni istante, per mezzo di una costruzione geometrica. Così, nel caso della caduta di un grave, la curva delle posizioni è una parabola: e dalle note proprietà della tangente a questa linea, si deduce che, in questo caso, la velocità è proporzionale al tempo. Ma, nella grande maggioranza dei casi, il problema della descrizione della tangente alla curva delle posizioni non sarà meno difficile del problema originario della determinazione della velocità di un mobile; e difatti, in molti casi, giova risolvere quel problema per mezzo di questo (*).

§ 6. *Sulla determinazione della velocità variabile.*

In qual modo il nostro problema si potrà risolvere in generale, apparirà da qualche riflessione sul caso, ora ricordato, della caduta libera dei gravi. Pel noto esperimento di Galileo, lo spazio descritto da un grave, che cade liberamente, dal principio del movimento, fino ad un istante

(*) Questo metodo si deve a *Roberval* (1602-1675) — K. P.

qualunque, è proporzionale al quadrato del tempo impiegato a descriverlo. Cosi, per ottenere questo spazio espresso in metri, bisogna moltiplicare il numero di secondi, che misura il tempo corrispondente, per sè stesso, ed applicare al risultato il coefficiente 4,9; donde segue che, per esempio, in quattro secondi, il grave cadrà per sedici volte 4,9 metri, ossia per circa ottanta metri. La velocità del grave è proporzionale al tempo impiegato ad acquistarla; cosi, la velocità posseduta dal grave alla fine di un dato numero di secondi, si ottiene moltiplicando questo numero per 9,8 metri: per modo che alla fine di quattro secondi raggiungerà il valore di circa quaranta metri al secondo. Questo risultato si deduce, come abbiam detto, dalla curva delle posizioni; occorrerebbe di trovare un processo di calcolo, che ci permettesse di dedurlo direttamente dalla legge sullo spazio (*). Un processo (di cui pre-

(*) Questa deduzione si potrà fare nel seguente modo. Siano a e b le distanze dal punto di partenza raggiunte dal mobile rispettivamente in t e $t + t'$ secondi: e troviamo la velocità media corrispondente all'intervallo di t' secondi compreso fra questi due tempi. Per la legge precedentemente citata, poichè lo spazio a è percorso in t secondi, sarà

$$a = 4{,}9\ t^2,$$

e per la stessa ragione

$$b = 4{,}9\ (t + t')^2 = 4{,}9\ (t^2 + 2\ tt' + t'^2).$$

Di qui si ricava

$$\begin{aligned} b - a &= 4{,}9\ (t^2 + 2\ tt' + t'^2) - 4{,}9\ t^2 \\ &= 4{,}9\ (2\ tt' + t'^2) \\ &= 4{,}9\ t'\ (2\ t + t'), \end{aligned}$$

espressione dello spazio percorso nell'intervallo di tempo t'.

La velocità media corrispondente a questo intervallo si otterrà dividendo questo spazio pel tempo t' impiegato a percorrerlo. Quindi la velocità media del nostro mobile nell'intervallo di t' secondi, sus-

senta un semplice esempio la nota a piedi di pagina), per mezzo del quale, da una relazione algebrica qualsiasi, che fornisce lo spazio percorso da un mobile in termini del tempo impiegato a percorrerlo, se ne deriva un'altra, la quale fornisce, in termini del tempo, la corrispondente velocità, è realmente in possesso dei matematici. Eccone un risultato: Se lo spazio percorso dal mobile è ad ogni istante a volte la n^{ma} potenza del tempo, la velocità sarà, ad ogni istante, na volte la $(n - 1)^{ma}$ potenza del tempo. È per mezzo di questo processo, mediante il quale in termini più generali, una nuova relazione algebrica si deriva da una relazione data, che si risolvono praticamente i due problemi, che abbiamo dimostrato equivalenti.

Da questi due problemi, si può farne dipendere un

seguente all'istante che corrisponde alla fine dei primi t secondi, sarà

$$\frac{b-a}{t'}$$
$$= \frac{4{,}9\, t'\,(2\,t + t')}{t'}$$
$$= 4{,}9\,(2\,t + t')$$
$$= 9{,}8\,t + 4{,}9\,t'.$$

Questa espressione si compone di due termini. Il primo, cioè 9,8 t, è affatto indipendente dall'intervallo considerato t'; invece il secondo, 4,9 t', dipende da esso; e per conseguenza, cambiando l'intervallo, cambierà di valore. Ora lo spazio di 4,9 t' metri per secondo, prendendo t' abbastanza piccolo, si potrà rendere piccolo finchè si vuole: per modo che la velocità media nell'intervallo di t' secondi, susseguente all'istante che corrisponde alla fine di t secondi, si potrà rendere, prendendo t' abbastanza piccolo, prossima finchè si vuole a 9,8 t metri per secondo. Allora, richiamando la nostra definizione di velocità istantanea, si vedrà che la velocità del grave considerato, alla fine di t secondi, sarà di 9,8 t metri per secondo.

terzo, egualmente di grande importanza nello studio dei fenomeni naturali. La distanza di un mobile che percorre una retta, da un punto fisso di essa, è una quantità variabile, e la velocità del mobile rappresenterà ad ogni istante la velocità con cui essa varia. Ora, qualunque quantità variabile col tempo si consideri, vi sarà luogo a considerare la velocità con cui varia, ossia la sua variazione riferita all'unità di tempo, e questa non si potrà debitamente rappresentare altrimenti che colla velocità di un punto.

Così, per esempio, l'altezza della marea, in un porto, varia, durante il giorno, da tempo a tempo, e potrà essere indicata da un indice, che sale e scende lungo una scala. Orbene, è chiaro che la velocità con cui essa varia non sarà altro che la velocità, colla quale l'indice si sposta. Analogamente, la pressione atmosferica si suol indicare coll'altezza di un barometro a mercurio; e la velocità con cui essa varia è evidentemente la stessa cosa che la velocità con cui s'innalza e s'abbassa la superficie del mercurio. In generale, ogniqualvolta occorre rappresentare le variazioni presentate da una quantità, in termini del tempo corrispondente, si potrà valersi di una tavola; ma questo metodo, che permette solo di ottenere una grossolana approssimazione, sarà anche il più laborioso: mentre il più opportuno consisterà sempre nel descrivere una curva dove l'*ascissa*, o distanza orizzontale, dei singoli punti rappresenti il tempo, e l'altezza corrispondente della curva il valore della quantità al tempo medesimo (pag. 280). Rammentiamo che il giusto modo di rappresentare una quantità consiste nel segnare, sopra una retta, una lunghezza proporzionale. Se la quantità varia, il termine di

questa lunghezza si sposterà, e la variazione della quantità sarà rappresentata dal moto di questo punto lungo la retta. La velocità con cui esso si move, ad ogni istante, sarà la variazione della quantità riferita all'unità di tempo, o velocità della sua variazione. E quando il valore, che riceve la quantità alla fine d'ogni tempo, sia rappresentata dalla perpendicolare abbassata da una curva sulla retta che rappresenta il tempo, questa sarà la curva delle posizioni di quel movimento, e la variazione relativa in discorso sarà determinata dalla tangente alla curva medesima.

§ 7. *Sul metodo delle flussioni.*

Per quanto precede, la ricerca della velocità di un mobile, data la posizione da esso occupata ad ogni istante, la descrizione della tangente ad una curva data, in un punto qualsiasi, e la determinazione della variazione relativa di una quantità, data la sua grandezza ad ogni istante, formano praticamente uno stesso problema; e la risoluzione di questo triplice problema è cómpito del calcolo a cui abbiamo testè accennato, per mezzo del quale, dalla legge algebrica, che fornisce una quantità, in termini del tempo, se ne deriva un'altra; che definisce, parimente in termini del tempo, la sua variazione riferita all'unità di tempo.

Le basi di questo efficacissimo calcolo furono poste da Newton. Egli considerava una quantità variabile come *fluente,* e chiamava *flussione* della quantità la velocità della sua variazione, ad ogni istante; donde il nome di *metodo delle flussioni,* dato al complesso dei metodi, che si fondano su quella derivazione di una legge dall'altra.

In generale la variazione relativa di una quantità varierà alla sua volta, col decorrere del tempo; ma, ove si consideri un intervallo di tempo, la cui durata sia brevissima in confronto di quella che occorre perchè la variazione corrispondente sia sensibile, potremo legittimamente supporre che, durante quell'intervallo, non si alteri che di poco. Ciò torna a supporre che, durante l'intervallo medesimo, la quantità varii in modo sensibilmente uniforme, e che la sua variazione relativa ad ogni istante non differisca notevolmente dal suo valor medio. Ora, il valor medio della variazione relativa di una quantità, durante un intervallo di tempo, è la differenza fra i valori presi dalla quantità al principio e al termine dell'intervallo considerato, divisa per la durata dell'intervallo stesso: per modo che, se una quantità qualsiasi, in un secondo di tempo, cresce di un centimetro, la velocità relativa media della sua variazione, durante quel secondo, sarà di un centimetro per secondo, non facendo ostacolo che la quantità considerata, nel decorso di quel secondo, non varii in modo uniforme, ed anche non varii del tutto. Quando la velocità della variazione non cambii che lentamente, si potrà farsi lecito di supporre, in via d'approssimazione, che non cambii affatto, e perciò si mantenga costantemente eguale al suo valor medio; noi sappiamo che, quanto più breve sarà l'intervallo di tempo considerato, tanto più piccolo sarà l'errore prodotto da tale supposizione. Questo è, in sostanza, il principio sul quale è fondato il calcolo, che insegna a derivare la legge, che fornisce la velocità di un mobile, da quella che ne fornisce la posizione. Si divide la differenza che passa fra le distanze che presenta il mobile, da un punto fisso della sua trajettoria, a due tempi

determinati, per l'intervallo che intercede fra quei due tempi, e si ottiene così la variazione relativa media, durante quell'intervallo di tempo. Se, rendendo l'intervallo medesimo sempre più piccolo, la variazione relativa media corrispondente si approssima sempre più ad un certo valore, quel valore si considera come la vera variazione relativa, o, come vogliamo chiamarla, la variazione relativa istantanea, quando l'intervallo considerato s'immagina ridotto ad un puro istante.

Siccome, per formulare il principio su cui si fonda la derivazione della legge delle velocità da quella delle posizioni si adoperano due differenze, il processo che ha per oggetto questa derivazione ha ricevuto, prima altrove, e poi anche in Inghilterra, il nome di *Calcolo Differenziale;* nome abbastanza infelice, perchè il concetto di differenza non presenta con esso altro legame all'infuori di quello, e non ha nulla a che vedere colla velocità della variazione d'una quantità. Comunque sia, oggetto del calcolo differenziale, o del metodo *delle flussioni,* è di trovare una legge che fornisca la variazione relativa di una quantità, data che sia una legge, la quale permette di calcolare la quantità stessa. Per quanto si è precedentemente veduto, quando ciò si sappia fare, il problema di descrivere la tangente ad una curva, e quello di trovare la velocità di un mobile, saranno in pari tempo risolti.

§ 8. *Sulla dipendenza delle quantità, e sulle funzioni.*

Ma non occorre soltanto di considerare delle leggi che permettono di determinare il valore di una quantità alla

fine di un tempo qualsiasi. Altri problemi, in cui più non entra il tempo, conducono a stabilire delle leggi, che forniscono una quantità in termini di un' altra, che potrà essere di qualunque specie. Alla prima specie apparterrà una legge che permetta di calcolare l'altezza della marea ad ogni ora del giorno; e, come si è veduto, noi potremo egualmente dedurla da una formola, come tracciare una curva, che rappresenti l' altezza in questione nel decorso del giorno. Invece, un esempio istruttivo di leggi della seconda specie ci è fornito dalla legge di Boyle, che dà la pressione di una quantità determinata di gas, in termini del suo volume, supposta costante la temperatura. L' espressione algebrica della relazione, che passa fra le due quantità, è che variano in ragione inversa l'una dell'altra: ossia che il loro prodotto è costante; per modo che, se una massa d' aria si comprime finchè il suo volume si riduce ad una metà, ad un terzo, o ad un quarto, la pressione diventa doppia, tripla, o quadrupla, o, come si suol dire, di « due, tre, o quattro atmosfere. »

Volendo invece ricorrere al metodo grafico, si descriverà una curva, rappresentando coll' ascissa, o distanza orizzontale dall' origine, il volume, e con una retta verticale descritta pel termine dell'ascissa, la pressione corrispondente. Per ogni temperatura speciale, la curva disegnata dal termine della retta, che rappresenta la pressione, sarà un'iperbola avente un asintoto verticale e l'altro orizzontale; e alle diverse temperature corrisponderanno altrettante iperbole, aventi i medesimi asintoti. Così, ogni punto del piano rappresenterà uno stato particolare del corpo; poichè, si potrà descrivere per esso un'iperbola determinata; ed allora la distanza orizzontale del punto dall'ori-

gine rappresenterà il volume e la sua distanza verticale, la pressione: mentre l'iperbola speciale sulla quale esso verrà a trovarsi indicherà la temperatura. Da ciò apparirà l'importanza che presentano nella fisica le *famiglie di curve:* concetto al quale abbiamo accennato nel precedente capitolo (pag. 192).

Quando la relazione, che passa fra due quantità, si deve dedurre dall'esperienza, gioverà rappresentare le singole osservazioni per mezzo di altrettanti punti (come nel § 11, Cap. IV). Così, nel caso in discorso, si osserverà la pressione esercitata da una massa d'aria sotto diversi volumi, e, per ogni coppia di valori corrispondenti del volume e della pressione, si segnerà un punto nel piano. Segnato un numero sufficiente di punti, apparirà chiaro all'occhio che questi punti giacciono sopra una curva iperbolica; sebbene ciò non si verificherà che approssimativamente: poichè le osservazioni non saranno mai abbastanza precise, perchè non occorra di tracciare la curva in modo che passi liberamente frammezzo ai diversi punti.

La legge che la pressione varia in ragione inversa del volume si dedurrà dalla curva, appena si riconosca che ha la forma di un'iperbola: e perciò, da questa curva, si potrà considerare rappresentata la relazione che collega la pressione e il volume. Ora, quando due quantità sono collegate l'una coll'altra in modo che, data una di esse, l'altra riesce in qualsiasi modo determinata, ciascuna si dice *funzione* dell'altra. Noi vediamo che una funzione si potrà concepire come definita da una relazione algebrica, ed anche da una curva. Così, la pressione corrispondente ad un dato volume, si potrà calcolare, dividendo un certo numero per quello che rappresenta il volume: nel qual caso

riuscirà espressa in unità di pressione dal quoziente così ottenuto; come pure si potrà determinare, innalzando da un dato punto della retta orizzontale, che rappresenta il volume, la perpendicolare, e prolungandola finchè incontra la curva: nel qual caso essa sarà rappresentata dall'ordinata così descritta (ossia dalla parte di questa perpendicolare compresa fra la retta orizzontale e la curva). Quando ci atteniamo a questo secondo modo, la mutua dipendenza di due quantità, il volume e la pressione, si esprime per mezzo di una certa curva; e così si stabilisce un vincolo fra la scienza dello spazio e quella della quantità.

Due scienze, da un vincolo comune, traggono sempre, l'una e l'altra, un sussidio. Così, una volta stabilita quella relazione, noi potremo adoperare i noti teoremi sulle quantità, allo scopo d'indagare la natura delle curve (e in ciò consiste in sostanza il metodo delle coordinate immaginato da Cartesio); mentre, delle note proprietà delle curve, ci potremo valere, per scoprire nuovi teoremi sulla mutua dipendenza delle quantità. Al primo scopo, la relazione, che collega le due quantità considerate, si traduce in un'equazione, donde ciascuna di esse si può ricavare in termini dell'altra. In tal caso, invece di dire che la pressione varia in ragione inversa del volume, gioverà dire che il prodotto della pressione e del volume, supposta la temperatura invariabile, è eguale ad una certa costante; e, riferendoci alla rappresentazione geometrica di questa legge, ne concludiamo che il prodotto dell'ascissa e dell'ordinata dei singoli punti della curva, che la rappresenta, è eguale ad una quantità fissa. Ciò si esprime abbreviatamente, scrivendo

$$xy = c^2;$$

e da questa equazione si potranno dedurre tutte le proprietà dell'iperbola.

Reciprocamente, si potrà valersi delle proprietà di curve note, per studiare la dipendenza di due quantità. Così, la

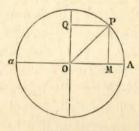



Fig. 97.

perpendicolare PM, calata dal punto P di un circolo sul diametro fisso AOa, è una quantità il cui rapporto al raggio OP del circolo dipende dalla grandezza dell'angolo POA, o, ciò che fa lo stesso (pag. 168), dalla lunghezza dell'arco AP, in modo ben noto; perchè è ciò che abbiamo chiamato il seno di quell'angolo, e che si chiama anche il seno dell'arco corrispondente. Supponiamo che l'arco AP cresca proporzionalmente al tempo, o, in altre parole, immaginiamo che il punto P percorra la circonferenza di moto uniforme; la retta PM rappresenterà la distanza dal centro O di un punto Q, che oscilla in un modo speciale, come vuole quella costruzione. Ora, questa specie particolare di moto oscillatorio, che si chiama un *moto armonico semplice*, si produce nell'aria, quando è agitata dal suono, nell'etere, quando lo è dalla luce, e, in generale, nei corpi elastici posti in vibrazione.

Una serie di relazioni, analoghe a quella che abbiamo ora ricordato, fra gli archi di un circolo, e certe rette, che si possono descrivere nel circolo, mediante semplici costruzioni, dà luogo alle così dette *funzioni circolari*, alle quali appartengono i rapporti trigonometrici considerati nel § 7 del Capitolo IV. Vi sono anche funzioni *iperboliche*, che dipendono dall'iperbola, pressochè nello stesso modo in cui le funzioni circolari dipendono dal circolo: e funzioni *ellittiche*, così chiamate, perchè per mezzo di esse si può calcolare l'arco dell'ellisse.

Ma il metodo più efficace d'indagare le proprietà delle funzioni si fonda sui principii, su cui ci siamo precedentemente trattenuti, discorrendo del moto; e cioè sullo studio delle velocità di variazione delle quantità considerate. Esse riescono egualmente collegate l'una coll'altra da una certa relazione, che il calcolo differenziale insegna a dedurre da quella che stabilisce la mutua dipendenza delle due quantità; e, per quanto abbiamo dimostrato, questa ricerca si riduce, in ultima analisi, al problema di descrivere la tangente alla curva, che rappresenta la relazione esistente fra le due primitive quantità. Così, nel caso precedentemente considerato di due quantità il cui prodotto è costante, ossia che variano in ragione inversa l'una dell'altra, si trova che il rapporto delle rispettive variazioni relative è eguale a quello delle quantità medesime: preso però con segno opposto, perchè è chiaro che, ad un aumento d'una delle due quantità, corrisponderà una diminuzione dell'altra. Quindi, supposta costante la temperatura, la variazione relativa del volume di un gas starà a quella della pressione, come il volume sta alla pressione: e per applicare giustamente il segno, si dovrà

tener calcolo della circostanza che un aumento della prima quantità implica una diminuzione della seconda, e viceversa.

La considerazione di questo rapporto serve a determinare una delle più importanti proprietà attinenti alla variabilità dei corpi, e cioè l'*elasticità*. L'elasticità di un gas si misura coll'aumento di pressione, capace di produrre una determinata *contrazione*; intendendo per contrazione la diminuzione di volume, divisa pel volume primitivo. Così, se il volume di un gas si riduce dell'uno per cento, la contrazione sarà di $\frac{1}{100}$; e, conformemente alla definizione, si otterrà ciò che abbiamo chiamato la misura dell'elasticità del gas, dividendo l'aumento di pressione necessario per produrre la contrazione medesima per $\frac{1}{100}$, ciò che torna a moltiplicarlo per 100.

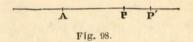
Ora, per la legge di Boyle, l'aumento di pressione diviso per la pressione originaria sarà eguale alla contrazione, cioè ad $\frac{1}{100}$; per modo che l'aumento di pressione sarà $\frac{1}{100}$ della pressione originaria. Ma abbiamo ora veduto che l'elasticità sarà misurata da 100 volte l'aumento di pressione necessario per produrre la contrazione considerata: quindi sarà eguale alla pressione originaria; e da ciò concludiamo che l'elasticità di un gas è costantemente misurata dalla sua pressione.

§ 9. *Sull'accelerazione e l'odografo.*

La velocità della variazione di una quantità misurabile qualunque, per quanto precede, deve essere considerata come un'altra quantità, che si può egualmente determi-

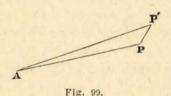
nare. Noi abbiamo dedotto questo concetto da quello di velocità di un punto mobile. Ora, nel caso più semplice che il punto descriva una retta, la sua velocità è quella con cui varia la sua distanza da un punto fisso della retta medesima: e, nota questa quantità, il movimento sarà perfettamente determinato. Invece, nel caso più generale, in cui il punto non si move in linea retta, ma percorre una curva qualunque, indicando solo con qual velocità cammina ad ogni istante, il moto non riuscirà completamente definito; a tal fine, bisognerà indicare anche in qual direzione si move. Perciò, in questo caso, oltre la grandezza della velocità, si deve misurare un'altra qualità di essa, e cioè la direzione. Noi procureremo di studiare le due cose ad un tempo. Il metodo, che permette di raggiungere questo scopo, è forse uno degli strumenti più efficaci, che abbiano valso ad estendere, in questi ultimi tempi, il campo delle scienze esatte. Perciò, definiremo la velocità di un punto mobile come la variazione riferita all'unità di tempo, o velocità della variazione, della sua posizione; e ci troviamo ricondotti al quesito, che cos'è la posizione?

A questo quesito fu risposto nel precedente capitolo. La posizione di un punto mobile è determinata dal passo diretto, o vettore, che conduce da un punto fisso al punto medesimo. Quindi, per ben capire la precedente definizione

Fig. 98.

della velocità di un punto mobile, dobbiamo farci, in primo luogo, un concetto preciso di ciò che si deve intendere per velocità con cui varia un vettore.

Riprendiamo, per un momento, il caso più semplice di un punto che si move in linea retta. In questo caso, la posizione del punto è determinata dal passo AP, che conduce dal punto fisso A della retta al punto mobile P. Il passo così definito, mentre il punto considerato si move, va continuamente cambiando; così, quando il punto arriva in P', da AP, diventa AP'. Come avviene questo cambiamento? Evidentemente, per l'aggiunta del passo PP' al passo primitivo AP; e la velocità di P e determinata dalla velocità colla quale il nuovo passo si aggiunge.

Ciò premesso, ritorniamo al caso generale. A è un dato punto fisso; e la posizione del punto mobile P è determinata dal passo AP. Mentre P si move, questo passo cambia, per modo che, quando P arriva in P', da AP, diventa AP'; ed è chiaro che, in tal modo, cambia non solo la grandezza, ma anche la direzione. Ora, questo cambiamento è prodotto dall'aggiunta del nuovo passo PP' al passo originario AP; infatti, andando da A in P, e poi P in P', si ottiene lo stesso risultato come passando direttamente da A in P'. Perciò

Fig. 99.

il nostro quesito è ormai ridotto a questi termini: con quale velocità il nuovo passo si aggiunge? o, ciò che torna lo stesso, qual passo si aggiunge per secondo, alla posizione primitiva? La soluzione sarà rappresentata, come precedentemente, da un certo passo, o vettore — vale a dire, la

velocità con cui varia la posizione di un mobile ha grandezza e direzione: e, in generale, la velocità della variazione, o variazione riferita all'unità di tempo, di un passo, o, di un vettore, sarà espressa da tante unità lineari per unità di tempo, in una certa direzione.

Riassumendo le ultime cose vedute, abbiamo definito la velocità di un punto mobile come la velocità con cui varia il passo, che indica ad ogni istante, la posizione del punto. Attenendoci a questa definizione, abbiamo trovato che, per rappresentare rigorosamente la velocità, si deve condurre una retta di determinata lunghezza, in una certa direzione; e ciò ne ha data occasione di osservare che, in generale, la variazione relativa di una quantità diretta è una quantità della stessa natura. Quest'ultima osservazione è della maggiore importanza, e ne faremo subito un'applicazione al caso stesso della velocità.

Se un punto si move di moto uniforme, e descrive una retta, la sua velocità mantiene sempre la stessa grandezza, e la stessa direzione; e perciò, se s'immagina descritta la retta che la rappresenta ad ogni istante, questa retta si manterrà inalterata, per tutto il movimento. Ma, se il punto considerato descrive di moto uniforme un circolo, la sua velocità, sebbene conservi sempre la stessa grandezza, cambierà continuamente di direzione; e, per conseguenza, la retta, che la rappresenta, conserverà sempre la stessa lunghezza: ma, per mantenersi costantemente parallela alla direzione del movimento del punto, dovrà continuamente girare. In generale, supposto che un mobile descriva una curva qualsiasi, immaginiamo di fissare un punto, e di condurre per esso, ad ogni istante, una retta, la quale rappresenti la velocità del mobile, nell'i-

stante medesimo. Questa velocità, in generale, andrà continuamente cambiando; e, per conseguenza, cambieranno del pari la grandezza e la direzione della retta così descritta, e il suo termine traccierà una linea determinata. Così, nel caso del moto circolare uniforme, poichè la grandezza della retta si mantiene costante, è chiaro che il suo termine descriverà un circolo; invece, nel caso di un corpo scagliato verticalmente in alto, si vedrà che l'estremo della retta, che ne rappresenta ad ogni istante la velocità, descriverà una retta verticale. La curva disegnata in tal modo dal termine della retta, che rappresenta, ad ogni istante, la velocità del mobile, si può considerare come una traccia del movimento considerato: e, per questo motivo, Hamilton le diede il nome di *odografo.* Data la trajettoria di un mobile, e l'odografo del movimento, si potrà determinare la velocità posseduta dal mobile, a qualunque punto della trajettoria. A tal fine, basterà condurre pel centro di riferimento dell'odografo una retta parallela alla tangente alla trajettoria, nel punto considerato; la lunghezza di questa retta rappresenterà la velocità richiesta. Hamilton dimostrò che, nel caso del moto di rivoluzione dei pianeti intorno al sole, l'odografo è sempre un circolo. Nel caso stesso, questa linea presenta altre importanti proprietà; come, per esempio, quella che la quantità di luce e di calore ricevuta dal pianeta, durante un intervallo di tempo qualsiasi, è proporzionale alla lunghezza dell'arco compreso fra i punti, che corrispondono al principio e alla fine dell'intervallo medesimo

Ma l'applicazione principale dell'odografo consiste nel fornire la più chiara idea della velocità con cui varia la velocità del mobile. Questa nuova quantità si chiama

l'*accelerazione;* e giova notare che per accelerazione non s'intende necessariamente un *aumento* di velocità; poichè, in questo caso, come in molti altri, i matematici si valgono di un solo termine, per nominare un cambiamento, che può avere varie direzioni; tal che, per esempio, una diminuzione di velocità si chiama un'accelerazione negativa. Questo modo d'esprimersi, sebbene a tutta prima, possa cagionare un certo imbarazzo, giova, anzi che confondere, una volta che ci si abbia fatto l'abitudine. Ora, una velocità può cambiare di grandezza, senza che ne varii la direzione: cioè può cambiare per l'aggiunta di una velocità parallela; e, in questo caso, si dice che l'accelerazione è nella direzione del movimento. Viceversa, può cambiare di direzione, senza che ne varii la grandezza; nel qual caso, come abbiamo veduto, l'odografo è un circolo. Allora, la velocità cambia per l'aggiunta di una nuova velocità in direzione perpendicolare, poichè la tangente al circolo in un punto qualunque è perpendicolare al raggio, che termina nel punto di contatto; e perciò, in questo caso, si dirà che l'accelerazione è perpendicolare alla direzione del moto. In generale, la velocità cambierà ad un tempo di grandezza e di direzione; e si vedrà facilmente che, in tal caso, l'accelerazione non potrà essere nè secondo la direzione del moto, nè ad angolo retto con essa, ma avrà qualche direzione intermedia fra l'una e l'altra.

Sia P (fig. 100) un mobile, la cui posizione è definita dal passo AP, che vi conduce dal punto fisso A; e la retta OQ, descritta pel punto egualmente fisso O, rappresenti la velocità del mobile. Se, per ogni posizione di P s'immagina descritta la OQ, mentre il mobile P de-

scriverà la propria trajettoria, il termine Q della retta stessa descriverà l'odografo; e questo moto si potrà considerare come quello di un secondo mobile, la cui posizione è definita ad ogni istante dal passo OQ, che vi

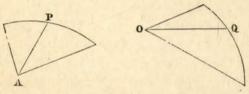



Fig. 100.

conduce dal centro di riferimento O. Ora si è veduto che la velocità con cui varia il passo, che conduce da un punto fisso ad un punto mobile, è la velocità del punto mobile. Quindi la velocità con cui varia il passo OQ è la velocità del punto Q, che descrive l'odografo. D'altra parte, per definizione, OQ rappresenta la velocità di P; quindi la velocità, colla quale il punto Q descrive l'odografo, è la velocità con cui varia la velocità del punto P, ossia l'accelerazione del movimento del mobile considerato. Così, l'accelerazione è la velocità di un certo mobile; e poichè la velocità, come si è veduto a suo luogo, è un vettore, ne segue immediatamente che l'accelerazione è un vettore, ossia una quantità diretta.

Quando la velocità di un mobile va continuamente cambiando di grandezza, e di direzione, si può, in certo qual modo, immaginare che il mobile venga incessantemente fornito di velocità, in ragione di un tanto al secondo. Una pietra, che si scaglia obliquamente in alto, per lasciarla nuovamente cadere, descrive una parabola: e, come vuole

l'andamento di questa linea, la sua direzione, che da principio guarda obliquamente insù, gira, e diventa orizzontale, ad un certo punto, a partire dal quale si volge sempre più sensibilmente in basso. Ora ciò che, durante il corso della pietra, realmente avviene, è che alla pietra si va continuamente aggiungendo velocità, in direzione verticale, e dall'alto in basso, in ragione di un tanto al secondo; più precisamente, la velocità della pietra si compone ad ogni istante con una velocità diretta verticalmente dall'alto in basso, la quale cresce uniformemente in ragione di 9,8 metri al secondo. Perciò, in questo caso, si dirà che l'accelerazione, o velocità con cui varia la velocità, è costante, ed eguale a 9,8 metri al secondo, in direzione verticale, dall'alto in basso.

Quando, attaccato un oggetto qualsiasi ad un capo di una corda, tenendo la corda per l'altro capo, lo facciamo rapidamente girare, si va continuamente comunicandogli velocità, nella direzione della mano; e poichè il corpo, girando, si move in direzione perpendicolare alla corda, la velocità aggiunta, in questo caso, è, ad ogni istante, perpendicolare a quella che il mobile già possiede. Analogo a questo è il caso del moto di rivoluzione dei pianeti intorno al sole. Il pianeta riceve una comunicazione continua di velocità, nella direzione del sole; ciò che si esprime, dicendo che l'accelerazione ha costantemente la direzione della retta che unisce il pianeta col sole; inoltre, si trova che, in questo caso, essa varia in ragione inversa del quadrato della distanza dei due corpi.

§ 10. *Sulle leggi del moto.*

Gli esempii ultimamente ricordati ci preparano a ben capire una legge del moto, che è fondamento d'ogni rigorosa trattazione della fisica. Supponiamo che un corpo sia in movimento, e domandiamoci che cosa dipende, in questo fenomeno, dalle « circostanze »; così chiamando la posizione occupata da ogni altro corpo per rispetto al corpo considerato, e lo stato del corpo stesso, per quanto è definito dal suo movimento, ad un istante qualsiasi. A tutta prima, potrà parere che da queste circostanze dipenda la velocità del corpo; ma, per poco che si rifletta, si vedrà che un corpo, nelle stesse circostanze, può moversi con velocità affatto diverse. Per esempio, ad una data altezza sul livello del mare, una pietra può moversi dall'alto in basso, o dal basso in alto, o in direzione orizzontale, o sotto un'inclinazione qualsivoglia: e, in ciascuno di questi casi, può avere una velocità di qualsiasi grandezza; nessuna di queste ipotesi contiene qualcosa che sia in contraddizione coll'esperienza. Ma, comunque si mova la pietra, nel passare per una data posizione, la sua velocità varierà sempre in ragione, di 9,8 metri al secondo, in direzione verticale, dall'alto in basso.

Così pure, per definire le circostanze del movimento di una sedia spinta da una persona sul ghiaccio, bisognerà determinare la compressione dei muscoli, che mantengono la mano applicata alla sedia. Ma la velocità, con cui la sedia si move, non dipenderà soltanto da questa compressione; poichè una stessa spinta potrà mettere la sedia in moto, quando fosse ferma: potrà, quando scivo-

lasse lentamente, accelerarne il moto: e potrà mantenerla in moto, con una determinata velocità. Che cosa dipende adunque dalle circostanze? In qualunque di questi modi, o in qualsiasi altro, si applichi la spinta, è chiaro che essa produrrà un cambiamento della velocità, e che questo cambiamento varierà coll' intensità della spinta. Perciò, dalle circostanze, dipende la velocità con cui varia la velocità della sedia, ossia la sua accelerazione; e queste circostanze sono la compressione dei muscoli, che aumenta la velocità, e l'attrito del ghiaccio, che la diminuisce nella direzione in cui la sedia si move.

Ciò premesso, la legge del moto, alla quale abbiamo fatto allusione, è la seguente: L'accelerazione di un corpo, ossia la variazione della sua velocità, riferita all'unità di tempo, dipende, ad ogni istante, dalla posizione occupata per rispetto ad esso dai corpi che lo circondano, mentre è indipendente dalla velocità colla quale il corpo si move. Notiamo che questa dipendenza potrà essere di due specie distinte. In certi casi, come quando il braccio d'una persona spinge una sedia, l'accelerazione del mobile dipenderà dallo stato di compressione dei corpi, che si trovano a contatto con esso; invece, in altri casi, come in quello del movimento dei pianeti intorno al sole, l'accelerazione dipende dalla posizione relativa di corpi posti a distanza.

L'accelerazione prodotta in un corpo da un particolare sistema di circostanze si deve determinare in ogni caso, per mezzo di esperimenti opportuni; ma l'esperienza ci insegna un'altra legge generale, la quale permette di semplificare di molto le indagini, che occorre di fare a quello scopo. Ecco questa legge: Se la presenza di un corpo,

quando esiste da solo, produce nel movimento di un dato corpo una certa accelerazione, e la presenza di un secondo, quando parimente esiste da solo, ve ne produce una cert'altra: supposto che i due corpi esistano insieme, ciascuno di essi, in generale, non esercita alcuna influenza sull'accelerazione prodotta dall'altro. In altre parole, l'accelerazione del mobile sarà, in questo caso, quella che risulta dalla combinazione delle accelerazioni prodotte separatamente dai due corpi. E poichè le accelerazioni sono quantità dirette, basterà comporle come si sono composti i vettori nel § 3 del precedente capitolo: e si otterrà così il risultato prodotto dalla sovrapposizione di due sistemi di circostanze.

Ora questa gran legge di natura, mentre semplifica in sommo grado lo studio del moto di uno *stesso* corpo, posto in diverse circostanze, non ci permette di fare alcuna conclusione intorno al moto di corpi *diversi,* posti nelle stesse circostanze. Se non che a questo caso provvede ampiamente un'altra legge generale, che, al pari delle due precedenti, si deduce dall'esperienza. Questa terza legge del moto, d'universale importanza, si può enunciare così: Il rapporto delle accelerazioni, che due corpi qualunque producono l'uno nell'altro, in virtù della loro reciproca influenza, è una quantità costante: affatto indipendente dal modo in cui questa influenza si esercita, in ogni caso speciale. In altre parole, comunque i due corpi agiscano l'uno sull'altro, e cioè sia che si tocchino, o che siano riuniti da un filo, o che, pur trovandosi a distanza, ciascuno, colla propria presenza, modifichi la velocità dell'altro, quel rapporto, nei casi ora citati, come in qualsiasi altro, resterà sempre lo stesso.

§ 11. *Sulla massa e la forza.*

Ecco un'applicazione di questa legge.

Immaginiamo di prendere un certo corpo P, del quale converremo di valerci come termine di confronto, ed un altro corpo qualsiasi Q, e di determinare il rapporto delle accelerazioni, che ciascuno di essi produce nell'altro, nella più semplice circostanza in cui può esercitarsi la loro reciproca influenza. Rappresenti m il rapporto così determinato, per mezzo di opportuni esperimenti: e precisamente, m esprima il rapporto dell'accelerazione del corpo campione P a quella del secondo corpo Q. Questa quantità si chiama la *massa* del corpo Q. Ora sia m' il rapporto dell'accelerazione che riceve il corpo P a quella che riceve un terzo corpo R, in virtù della loro mutua influenza. La nostra legge, nei termini in cui fu enunciata, ci permette di asserire che questi rapporti avranno sempre lo stesso valore, qualunque siano le circostanze in cui P e Q, e P ed R esercitano la loro scambievole influenza; ma non ci dice nulla intorno al rapporto delle accelerazioni, che Q ed R produrranno l'uno nell'altro. Ora, anche in questo caso, l'esperienza ci toglie d'imbarazzo, e c'insegna che, nelle ipotesi precedenti, ogniqualvolta Q ed R agiscono l'uno sull'altro, il rapporto dell'accelerazione di Q a quella di R sarà l'*inverso* del rapporto di m ad m'. Quindi, posta eguale all'unità la *massa* del corpo preso come campione, potremo enunciare la proposizione generale che *le accelerazioni, che ricevono due corpi per la loro scambievole influenza, sono inversamente proporzionali alle masse.* Segue da ciò che, una

volta determinate le masse dei corpi, dato un certo sistema di circostanze, si potrà valersi dell'effetto ch'esse producono sopra *un* corpo, per calcolare quello che avranno la facoltà di produrre sopra qualunque altro.

Il lettore osserverà che la massa, come l'abbiamo testè definita, è un rapporto di accelerazioni: e cioè una pura costante numerica, che si potrà determinare coll'esperienza, per ogni coppia di corpi. Ora si trova, coll'esperienza, che le masse di due corpi composti della stessa sostanza, quando questa è uniformemente distribuita, sono proporzionali ai loro volumi. Questa relazione fra la massa e il volume ha dato origine a una quantità d'idee vaghe ed oscure. Essa è stata l'occasione perchè si associasse ai corpi qualcosa d'indefinibile, a cui si è attribuito il nome di *materia*. Secondo questo modo di vedere, la materia, che s'immagina distribuita nello spazio, è qualcosa che compone i corpi; e, conformemente a ciò, la massa di un corpo si definisce come la quantità di materia da esso contenuta. Al concetto di materia si è accoppiato quello di ciò che si chiama *forza*: e che, in un modo non mai chiarito, si suppone risedere nella materia. La forza, che un corpo P esercita sopra un corpo Q di massa m, è una quantità proporzionale alla massa m di Q, e all'accelerazione, che la presenza di P produce nel moto di Q. Il lettore non durerà fatica a riconoscere che questo concetto di forza non spiega perchè la presenza di P tende ad alterare la velocità di Q, più che il concetto di materia non valga a spiegare perchè le accelerazioni, che ricevono due corpi per la loro scambievole influenza, sono inversamente proporzionali alle masse. L'uso di fondare i concetti attinenti al moto dei corpi sui termini di « materia », e di « forza »

è stato troppo spesso causa d'oscurità, non solo in matematica, ma anche in filosofia. Noi non sappiamo *perchè* la presenza di un corpo tende a cambiare la velocità di un altro; dicendo che cagione di ciò è la forza posseduta dal primo corpo, la quale agisce sulla materia del secondo, non facciamo altro che mascherare con un giro di parole la nostra ignoranza. Tutto ciò che noi sappiamo è che la presenza di un corpo tende a modificare la velocità di un altro: e che, ogniqualvolta ciò avvenga, questa modificazione si può esattamente determinare coll'esperienza, ed obbedisce alle leggi precedentemente enunciate.

Calcolare, per mezzo delle leggi del moto, i molteplici effetti, che una combinazione qualsiasi di circostanze produce sopra un corpo di costituzione comunque complicata, o sopra un sistema di corpi, deducendoli dagli effetti, sperimentalmente osservati, che, sopra un corpo della più semplice natura, producono le circostanze più semplici, è còmpito speciale di quel ramo delle scienze esatte, che forma la così detta *Matematica applicata*.

FINE.